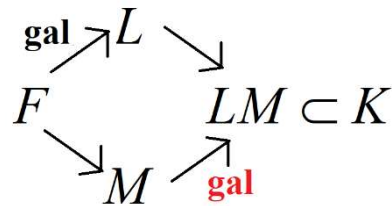


### Algebra n. 3 - NOTE ALLA LEZIONE 15

**Osservazione 15.2** Essendo, per ogni  $i$ , il numero  $n$  un multiplo di  $n_i$ , posto  $n = n_i d$ , si ha che  $(\sqrt[n_i]{a_i})^n = ((\sqrt[n_i]{a_i})^{n_i})^d = a_i^d$ , e quindi  $\sqrt[n]{a_i}$  è una radice  $n$ -esima di  $a_i^d \in F(\sqrt[n]{a_1}, \dots, \sqrt[n_{i-1}]{a_{i-1}})$ .

**Lemma 15.8** L'enunciato si può riassumere nel seguente diagramma:



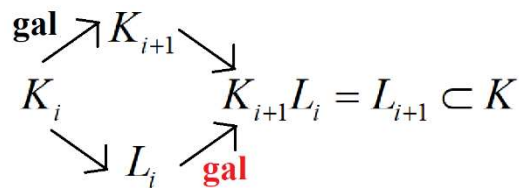
Dimostrazione del **Teorema 15.9**:

Nella prima parte, il Teorema 12.2 è applicato con i dati seguenti:

$$\begin{aligned}
 F &\rightarrow K_i \\
 L &\rightarrow K_{i+1} \\
 K &\rightarrow L
 \end{aligned}$$

Inoltre, per ogni  $i = 0, \dots, n-1$ ,  $L_{i+1}$  è il sottocampo di  $K$  generato da  $K_{i+1} \cup \{\omega\} = K_{i+1} \cup K_i \cup \{\omega\}$ , ove l'uguaglianza segue dal fatto che  $K_i \subset K_{i+1}$ . Poiché l'insieme  $K_i \cup \{\omega\}$  genera il sottocampo  $L_i$ , ne consegue che l'unione  $L_i \cup K_{i+1}$  genera  $L_{i+1}$ .

Il Lemma 15.8 si applica secondo il seguente diagramma:



La Proposizione 15.5 si applica con i seguenti dati:

$$\begin{aligned}
 F &\rightarrow L_i \\
 L &\rightarrow L_{i+1} \\
 n &\rightarrow d
 \end{aligned}$$

Ogni estensione algebrica di un campo è contenuta in una sua chiusura algebrica. Quindi, senza ledere la generalità, possiamo supporre che l'estensione  $F(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  di  $F$  sia contenuta in  $K$ , la chiusura algebrica inizialmente assegnata per  $F$ .

A proposito della *chiusura normale* di un'estensione algebrica, riportiamo quanto affermato nel riferimento bibliografico indicato (testo di P. Morandi, *Field and Galois Theory*):

### *The normal closure of a field extension*

Let  $K$  be an algebraic extension of  $F$ . The *normal closure* of  $K/F$  is the splitting field over  $F$  of the set  $\{\min(F, a) : a \in K\}$  of minimal polynomials of elements of  $K$ . As we will show below, the normal closure  $N$  of the extension  $K/F$  is a minimal normal extension of  $F$  which contains  $K$ . This is reasonable since, for each  $a \in K$ , the polynomial  $\min(F, a)$  splits over any normal extension of  $F$  containing  $K$ . Therefore, the set  $\{\min(F, a) : a \in K\}$  is a minimal set of polynomials which must split in any extension of  $K$  that is normal over  $F$ . We formalize this in the next result, which gives the basic properties of normal closure.

**Proposition 5.9** *Let  $K$  be an algebraic extension of  $F$ , and let  $N$  be the normal closure of  $K/F$ .*

1. *The field  $N$  is a normal extension of  $F$  containing  $K$ . Moreover, if  $M$  is a normal extension of  $F$  with  $K \subseteq M \subseteq N$ , then  $M = N$ .*
2. *If  $K = F(a_1, \dots, a_n)$ , then  $N$  is the splitting field of the polynomials  $\min(F, a_1), \dots, \min(F, a_n)$  over  $F$ .*
3. *If  $K/F$  is a finite extension, then so is  $N/F$ .*
4. *If  $K/F$  is separable, then  $N/F$  is Galois.*

**Lemma 16.6** *Let  $K$  be an  $n$ -radical extension of  $F$ , and let  $N$  be the normal closure of  $K/F$ . Then  $N$  is an  $n$ -radical extension of  $F$ .*

Per quanto precede, se, nella nostra dimostrazione, sostituiamo ad  $L$  una chiusura normale dell'estensione  $L/F$ , otterremo un'estensione  $n$ -radicale e normale di  $F$ .

Se  $L$  è un'estensione normale di  $F$ , allora, in base al Teorema 11.4, è il campo di spezzamento su  $F$  di qualche polinomio  $f(x) \in F[x]$ . Ne consegue che  $L(\omega)$  è il campo di spezzamento su  $F$  del polinomio  $f(x)(x^n - 1) \in F[x]$ . Pertanto, è un'estensione normale di  $F$ . La separabilità è garantita dalla caratteristica zero.

Secondo la Proposizione 13.11, il gruppo di Galois  $G(L_1, L_0) = G(F(\omega), F)$  (del polinomio  $x^n - 1$ ) è isomorfo ad un sottogruppo di  $U(\mathbb{Z}_n)$ , e quindi è abeliano. Per ogni  $i = 1, \dots, n-1$ , ai gruppi di Galois  $G(L_{i+1}, L_i) = G(L_i(\alpha_i), L_i)$  si applica la Proposizione 13.13, dunque questi sono abeliani, in

quanto ciclici: si ricordi che, per costruzione, l'elemento  $\alpha_i$  di  $L_{i+1}$  è radice  $n$ -esima di un elemento di  $L_i$ . Siccome  $\omega \in L_i$ , ciò implica che  $L_{i+1} = L_i(\alpha_i)$  è un campo di spezzamento su  $L_i$  del polinomio  $x^n - \alpha_i^n$ .

Il Teorema 12.5b) si applica al campo intermedio  $M$  tra  $F$  e la sua estensione galoisiana  $L(\omega)$ . Quindi si ha l'isomorfismo  $G(M, F) \simeq G(L(\omega), F) / G(L(\omega), M)$ .