Algebra n. 3 - NOTE ALLA LEZIONE 15

Osservazione 15.2 Essendo, per ogni i, il numero n un multiplo di n_i, posto $n = n_i d$, si ha che $(\sqrt[n_i]{a_i})^n = \left((\sqrt[n_i]{a_i})^{n_i}\right)^d = a_i{}^d$, e quindi $\sqrt[n_i]{a_i}$ è una radice n-esima di $a_i{}^d \in F(\sqrt[n_1]{a_1}, ..., \sqrt[n_{i-1}]{a_{i-1}})$.

Lemma 15.8 L'enunciato si può riassumere nel seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dr] & \\
F \arrow[ur, "\mathbf{gal}"] \arrow[dr] & & LM \subset K \\
 & M \arrow[ur, "\mathbf{gal}"'] &
\end{tikzcd}$$

<u>Dimostrazione</u> del **Teorema 15.9**:

Nella prima parte, il Teorema 12.2 è applicato con i dati seguenti:

$$F \to K_i$$
$$L \to K_{i+1}$$
$$K \to L$$

Inoltre, per ogni $i = 0, ..., n-1$, L_{i+1} è il sottocampo di K generato da $K_{i+1} \cup \{\omega\} = K_{i+1} \cup K_i \cup \{\omega\}$, ove l'uguaglianza segue dal fatto che $K_i \subset K_{i+1}$. Poiché l'insieme $K_i \cup \{\omega\}$ genera il sottocampo L_i, ne consegue che l'unione $L_i \cup K_{i+1}$ genera L_{i+1}.

Il Lemma 15.8 si applica secondo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & K_{i+1} \arrow[dr] & \\
K_i \arrow[ur, "\mathbf{gal}"] \arrow[dr] & & K_{i+1}L_i = L_{i+1} \subset K \\
 & L_i \arrow[ur, "\mathbf{gal}"'] &
\end{tikzcd}$$

La Proposizione 15.5 si applica con i seguenti dati:

$$F \to L_i$$
$$L \to L_{i+1}$$
$$n \to d$$

Ogni estensione algebrica di un campo è contenuta in una sua chiusura algebrica. Quindi, senza ledere la generalità, possiamo supporre che l'estensione $F(\alpha_1,...,\alpha_r)$ di F sia contenuta in K, la chiusura algebrica inizialmente assegnata per F.
A proposito della *chiusura normale* di un'estensione algebrica, riportiamo quanto affermato nel riferimento bibliografico indicato (testo di P. Morandi, *Field and Galois Theory*):

The normal closure of a field extension

Let K be an algebraic extension of F. The *normal closure* of K/F is the splitting field over F of the set $\{\min(F, a) : a \in K\}$ of minimal polynomials of elements of K. As we will show below, the normal closure N of the extension K/F is a minimal normal extension of F which contains K. This is reasonable since, for each $a \in K$, the polynomial $\min(F, a)$ splits over any normal extension of F containing K. Therefore, the set $\{\min(F, a) : a \in K\}$ is a minimal set of polynomials which must split in any extension of K that is normal over F. We formalize this in the next result, which gives the basic properties of normal closure.

Proposition 5.9 *Let K be an algebraic extension of F, and let N be the normal closure of K/F.*

1. *The field N is a normal extension of F containing K. Moreover, if M is a normal extension of F with $K \subseteq M \subseteq N$, then $M = N$.*
2. *If $K = F(a_1, \ldots, a_n)$, then N is the splitting field of the polynomials $\min(F, a_1), \ldots, \min(F, a_n)$ over F.*
3. *If K/F is a finite extension, then so is N/F.*
4. *If K/F is separable, then N/F is Galois.*

Lemma 16.6 *Let K be an n-radical extension of F, and let N be the normal closure of K/F. Then N is an n-radical extension of F.*

Per quanto precede, se, nella nostra dimostrazione, sostituiamo ad L una chiusura normale dell'estensione L/F, otterremo un'estensione n-radicale e normale di F.

Se L è un'estensione normale di F, allora, in base al Teorema 11.4, è il campo di spezzamento su F di qualche polinomio $f(x) \in F[x]$. Ne consegue che $L(\omega)$ è il campo di spezzamento su F del polinomio $f(x)(x^n - 1) \in F[x]$. Pertanto, è un'estensione normale di F. La separabilità è garantita dalla caratteristica zero.

Secondo la Proposizione 13.11, il gruppo di Galois $G(L_1, L_0) = G(F(\omega), F)$ (del polinomio $x^n - 1$) è isomorfo ad un sottogruppo di $U(\mathbb{Z}_n)$, e quindi è abeliano. Per ogni $i = 1, ..., n-1$, ai gruppi di Galois $G(L_{i+1}, L_i) = G(L_i(\alpha_i), L_i)$ si applica la Proposizione 13.13, dunque questi sono abeliani, in quanto ciclici: si ricordi che, per costruzione, l'elemento α_i di L_{i+1} è radice *n*-esima di un elemento di L_i. Siccome $\omega \in L_i$, ciò implica che $L_{i+1} = L_i(\alpha_i)$ è un campo di spezzamento su L_i del polinomio $x^n - \alpha_i^{\ n}$.

Il Teorema 12.5b) si applica al campo intermedio *M* tra *F* e la sua estensione galoisiana $L(\omega)$. Quindi si ha l'isomorfismo $G(M,F) \simeq G(L(\omega),F) \big/ G(L(\omega),M)$.