Rafael Bombelli risolve un'equazione algebrica (*L'Algebra*, 1572)

Iniziamo con il ricordare che per l'equazione $x^3 = px+q$, la soluzione con il metodo di Bombelli sarà:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Nel caso dell'equazione $x^3 = 15x+4$, i calcoli effettuati da Bombelli sono illustrati qui sotto:

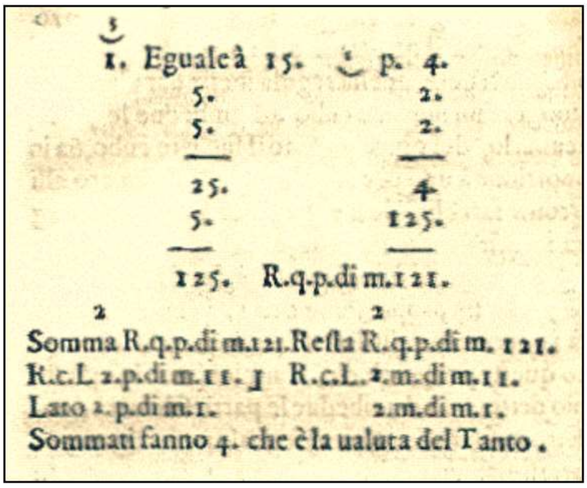
$x^3 = 15x+4$
$[x^3 = px+q]$

$(4/2)^2-(15/3)^3 = -121$
$[(q/2)^2-(p/3)^3 = -121]$

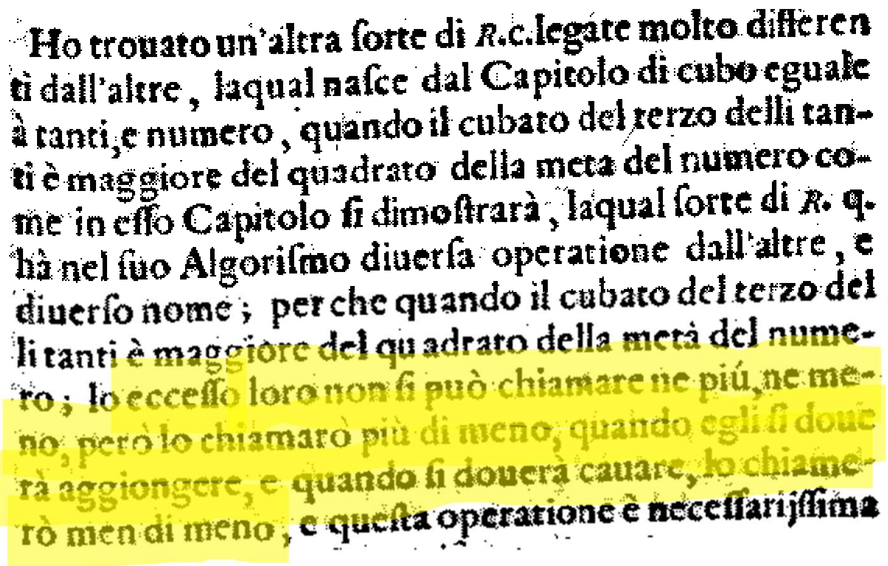
$2+\sqrt{-121} \quad 2-\sqrt{-121}$

$x = \sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i}$

$x = (2+i) + (2-i) = 4$


1. Egualeà 15. p. 4.
5. 2.
5. 2.
25. 4
5. 125.
125. R.q.p.di m.121.
Somma R.q.p.di m.121.Reſta R.q.p.di m. 121.
R.c.L 2.p.di m.11.] R.c.L.2.m.di m.11.
Lato 2.p.di m.1. 2.m.di m.1.
Sommati fanno 4. che è la ualuta del Tanto.

Si può notare come al nostro "-121" non venga attribuito né il segno *più*, né il segno *meno*, bensì un terzo segno, chiamato "*più di meno*", a cui se ne aggiunge un quarto, *"meno di meno"*, letto nel rigo sottostante. Lo stesso Bombelli lo spiega, in generale, nell'introdurre il metodo:


Ho trouato un'altra ſorte di R.c.legate molto differen
ti dall'altre, laqual naſce dal Capitolo di cubo eguale
à tanti, e numero, quando il cubato del terzo delli tan-
ti è maggiore del quadrato della meta del numero co-
me in eſſo Capitolo ſi dimoſtrarà, laqual ſorte di R. q.
hà nel ſuo Algoriſmo diuerſa operatione dall'altre, e
diuerſo nome; per che quando il cubato del terzo del
li tanti è maggiore del quadrato della metà del nume-
ro; lo eccesso loro non ſi può chiamare ne più, ne me-
no, però lo chiamarò più di meno, quando egli ſi doue
rà aggiongere, e quando ſi douerà cauare, lo chiame-
rò men di meno, e queſta operatione è neceſſariſſima

In particolare, a -121 viene attribuito il segno *p.d.m.*, che rimane dopo l'estrazione della radice quadrata, scritta come *p.d.m.* 11. Ma, nel momento in cui questa radice quadrata deve essere sottratta, il suo segno cambia, e la radice diviene *m.d.m.* 11.

Questa è una delle regole che vengono esplicitamente elencate da Bombelli nella seguente tabella, precisamente, è la seconda dell'elenco:

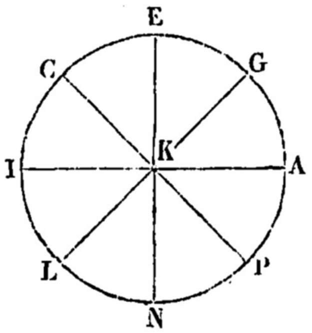
Più uia più di meno, fà più di meno.
Meno uia più di meno, fà meno di meno.
Più uia meno di meno, fà meno di meno.
Meno uia meno di meno, fà più di meno.
Più di meno uia più di meno, fà meno.
Più di meno uia men di meno, fà più.
Meno di meno uia più di meno, fà più.
Meno di meno uia men di meno fà meno.

Si tratta, complessivamente, delle regole di "moltiplicazione dei segni" che vanno ad integrare quelle già note per i segni *più* e *meno*.

I numeri dotati di questi due "segni" supplementari verranno mantenuti distinti dai numeri *reali* da Cartesio che, ne *La Géométrie* (1637), si riferisce ad essi come alle radici di un'equazione che *si immaginano* (quelle che non sono reali, ma completerebbero quelle reali ad un numero pari al grado dell'equazione).

Successivamente, il matematico svizzero Jean-Robert Argand, in un saggio intitolato *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* (1874), introduce l'idea di collegare i numeri immaginari ai numeri reali, attraverso la seguente considerazione dinamica: un numero negativo è dotato di un valore *assoluto* e di un *senso* di applicazione che descrive, ad esempio, l'atto di sottrarre una certa cifra da un importo assegnato. Ad esempio, il numero – 3 è accomunato al numero 3 dallo stesso valore, ma se ne distingue per il verso in cui viene compiuta l'operazione corrispondente (sommare, anziché sottrarre). Geometricamente parlando, i due numeri rappresentano, lungo una retta, due movimenti di uguale ampiezza ma direzioni opposte. Se sono queste che ci interessano, possiamo rappresentarle con i numeri 1 e -1. Quindi, osserva Argand, possiamo chiederci quale sia il *medio proporzionale* fra questi numeri, ossia il "numero" 1_d (idealmente associato ad una direzione, da determinare) tale che

$$+1 : 1_d :: 1_d : -1$$



Nel diagramma proposto nel lavoro di Argand, detti *KA* e *KI* i segmenti che rappresentano le direzioni 1 e -1, rispettivamente, si nota che sia *KE* sia *KN* sono soluzioni della proporzione. Analogamente, *KC* e *KP* sono medi proporzionali fra *KG* e *KL*.
Le due direzioni emergenti dalla proporzione sono ancora l'una opposta all'altra, ed entrambe perpendicolari a quelle assegnate.
La stessa idea, inizialmente passata inosservata, era stata formulata decenni prima dal matematico di origine norvegese Caspar Wessel, che nel 1799 così scriveva:

§ 5.

Lad $+1$ betegne den positive retlinede Unitet, og $+\varepsilon$ en vis anden Unitet, der er perpendicular paa den positive, og har samme Begyndelsespunct: saa er Directionsvinkelen af $+1 = 0$, af $-1 = 180°$, af $+\varepsilon = 90°$, af $-\varepsilon = -90°$ eller $270°$; og i Folge den Regel, at Productets Directionsvinkel er Summen af Factorernes, bliver $(+1).(+1) = +1$, $(+1).(-1) = -1$, $(-1).(-1) = +1$, $(+1).(+\varepsilon) = +\varepsilon$, $(+1).(-\varepsilon) = -\varepsilon$, $(-1).(+\varepsilon) = -\varepsilon$, $(-1).(-\varepsilon) = +\varepsilon$, $(+\varepsilon).(+\varepsilon) = -1$, $(+\varepsilon).(-\varepsilon) = +1$, $(-\varepsilon).(-\varepsilon) = -1$.

Hvoraf sees at ε bliver $= \sqrt{-1}$, og Productets Afvigning bestemmes saaledes, at ei en eneste af de almindelige Operationsregler overtrædes.

Il testo è in danese, lingua di formazione di Wessel, ed è stato proprio questo il fattore che ne ha ostacolato la circolazione all'interno della comunità scientifica. Qui il ragionamento è di stampo geometrico, e ricalca nella struttura quello di Argand, ma seguendo una visione più aritmetica, incentrata sulla somma delle ampiezze degli angoli come traduzione della composizione di due rotazioni intorno allo stesso punto. I prodotti presentati da Wessel, d'altro canto, ricordano le regole "dei segni" proposte da Bombelli. E, come queste ultime, intendono estendere le *comuni regole per le operazioni* tra numeri ad un calcolo effettuato sui segmenti orientati. Viene così completato l'inquadramento geometrico – e dunque, teorico – di espressioni numeriche che i matematici, dal Cinquecento in poi, avevano continuato a manipolare aritmeticamente secondo le regole ottenute per analogia da quelle vigenti per i numeri reali, ma ancora prive di un fondamento rigoroso.