Miscellanea di proprietà delle permutazioni e delle strutture algebriche

1. (*Potenze di una permutazione decomposta in cicli disgiunti*)
Data una permutazione $\sigma \in S_n$, la cui decomposizione in cicli disgiunti sia $\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_r$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, poiché i cicli γ_i commutano a due a due, si ha

$$\sigma^k = (\gamma_1 \cdots \gamma_r)^k = \gamma_1^k \cdots \gamma_r^k.$$

Questa è l'estensione della Proposizione 17.6 (d) al caso di r fattori.

2. (*Caso particolare della formula del periodo*)
Sia $(G, \cdot)$ un gruppo moltiplicativo, e sia $g \in G$ un elemento periodico di periodo n. Allora, per ogni divisore positivo d di n, l'elemento g^d, a sua volta periodico, ha periodo $\frac{n}{d}\left(= \frac{n}{\mathrm{MCD}(n,d)}\right)$, secondo quanto stabilito dal Lemma 17.36.

3. (*Una particolare classe di endomorfismi di gruppi additivi abeliani*)
Sia $(G, +)$ un gruppo **abeliano**. Sia $n \in \mathbb{Z}$. Definiamo l'applicazione $\varphi : G \to G$ ponendo, per ogni $g \in G, \varphi(g) = ng$. Questo è un omomorfismo di gruppi, com'è facile verificare, sulla base della Proposizione 17.3 (d). Questa considerazione generalizza quanto visto, nel caso particolare di $G = \mathbb{Z}$, nell'Esempio 3.9.

4. (*Sottogruppi di $\mathbb{Z}_n$*)
Sia n un intero positivo. Sappiamo che per ogni $m, a \in \mathbb{Z}$, $[ma]_n = a[m]_n$ (vedi Esercizio 17.33). Quindi

$$\{[ma]_n \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{a[m]_n \mid a \in \mathbb{Z}\} = \langle [m]_n \rangle,$$

sottogruppo ciclico di $\mathbb{Z}_n$ generato da $[m]_n$.

5. (*Periodi in un prodotto diretto di gruppi*)
Si può provare facilmente che l'elemento (g_1, g_2) del gruppo prodotto diretto $G_1 \times G_2$ è periodico se e solo se g_i è un elemento periodico di G_i (per $i = 1, 2$). In tal caso

$$o((g_1, g_2)) = \mathrm{mcm}(o(g_1), o(g_2)).$$

6. (*Divisori dello zero in un prodotto diretto di anelli*)
Siano A_1 e A_2 anelli. Siano $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$. Allora, se a_1 è un divisore dello zero (non nullo) in A_1, la coppia (a_1, a_2) è un divisore dello zero (non nullo) nel prodotto diretto $A_1 \times A_2$. Infatti, per ipotesi, esiste un elemento non nullo $b \in A_1$ tale che $a_1 b = 0_{A_1}$ oppure $ba_1 = 0_{A_1}$. Allora $(b, 0_{A_2})$ è un elemento non nullo di $A_1 \times A_2$ tale che

$$(a_1, a_2)(b, 0_{A_2}) = (0_{A_1}, 0_{A_2}) \text{ oppure } (b, 0_{A_2})(a_1, a_2) = (0_{A_1}, 0_{A_2}).$$

Ciò prova la nostra tesi. Analogamente la si dimostra nel caso in cui a_2 sia un divisore dello zero (non nullo) in A_2.

7. (*Elementi aventi un periodo fissato in un gruppo ciclico finito*)
Sia G un gruppo ciclico finito di ordine n e sia d un divisore positivo di n. Per la Proposizione 17.39, G possiede esattamente un sottogruppo H di ordine d, e questo, in base alla

Proposizione 17.35, è ciclico. Ogni elemento di G avente periodo d appartiene dunque ad H: precisamente, gli elementi di G aventi periodo d sono tutti e soli i generatori di H. Questi, in base al Corollario 17.37, sono esattamente $\varphi(d)$. In particolare, se n è pari, in G esiste uno ed un solo elemento di periodo 2 (un elemento, diverso dall'elemento neutro, che è simmetrico di sé stesso).