Consideriamo gli insiemi

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$
$\mathbb{Q}(i) = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Q}\}$

Esercizio: Provare che $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $\mathbb{Q}(i)$ sono sottocampi di $\mathbb{R}$ e di $\mathbb{C}$, rispettivamente.

Svolgimento: Proviamo solo la prima affermazione. Anzitutto osserviamo che, come è facile verificare, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ è un sottoanello di $\mathbb{R}$, quindi, in particolare, è commutativo. Inoltre è unitario, avendo come elemento neutro del prodotto il numero 1. Resta da verificare che ogni elemento non nullo di $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ è invertibile in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. In effetti, se $(a, b) \neq (0, 0)$ è una coppia di numeri razionali, allora

$$(a + b\sqrt{2})^{-1} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{-b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

La seconda affermazione si prova in modo del tutto analogo.

Esercizio: Dire se i campi $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $\mathbb{Q}(i)$ sono anelli isomorfi.

Svolgimento: Se esiste un isomorfismo di anelli $\varphi : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(i)$, allora $\varphi(1) = 1$, e quindi, applicando la conservazione della somma, si ricava che $\varphi(2) = 2$. Ma, d'altra parte, la conservazione del prodotto fornisce $2 = \varphi(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = \varphi(\sqrt{2})^2$, il che è assurdo, dato che in $\mathbb{Q}(i)$ non esistono radici quadrate di 2. Ciò prova che i due campi non sono anelli isomorfi.

Osservazioni aggiuntive:

1.) Allo stesso modo si prova che $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ non è isomorfo al seguente sottocampo di $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Q}\}$.

2.) Lo stesso ragionamento dimostrativo consente anche di concludere che i campi $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ e $\mathbb{C}$ non sono isomorfi. A tale conclusione si può giungere per altro anche più direttamente, su basi insiemistiche, considerando che diverse sono le cardinalità, rispettivamente numerabile e più che numerabile.

Domanda supplementare: Sono isomorfi gli anelli $2\mathbb{Z}$ e $3\mathbb{Z}$? Sono isomorfi gli anelli $n\mathbb{Z}$ e $m\mathbb{Z}$, ove n e m sono numeri naturali distinti?

Siano $n,\ m$ numeri naturali e sia $f: n\mathbb{Z} \rightarrow m\mathbb{Z}$ un omomorfismo di anelli. Sia $a \in \mathbb{Z}$ tale che $f(n) = ma$. Allora, per la conservazione della somma, si avrà che

$$f\left(n^2\right) = f\big(\underbrace{n + \cdots + n}_{n \text{ volte}}\big) = \underbrace{f(n) + \cdots + f(n)}_{n \text{ volte}} = nf(n) = n(ma)$$

D'altra parte, dato che f conserva anche il prodotto, si avrà anche:

$$f\left(n^2\right) = f(n \cdot n) = f(n)f(n) = f(n)^2 = (ma)^2.$$

Sarà dunque $n(ma) = (ma)(ma)$. Se fosse $a = 0$, allora sarebbe $f(n) = 0$ e quindi per ogni b intero positivo si avrebbe, per la conservazione della somma, analogamente a quanto visto sopra,

$$f(bn) = bf(n) = 0.$$

Inoltre, per ogni b intero negativo, si avrebbe, per la conservazione degli opposti e della somma,

$$-f(bn) = f(-bn) = f((-b)n) = (-b)f(n) = 0.$$

Ciò prova che, per ogni intero $b,\ f(bn) = 0,$ ossia f sarebbe l'omomorfismo nullo. In caso contrario, $ma \neq 0$, e pertanto, cancellando ma dall'uguaglianza qui sopra si ottiene $n = ma$. Ne consegue che m divide n. Questa è dunque condizione necessaria all'esistenza di un omomorfismo di anelli non nullo$f: n\mathbb{Z} \rightarrow m\mathbb{Z}$. In particolare, se esiste un isomorfismo di anelli f, allora $m|n$ e, per simmetria, $n|m$. Quindi gli anelli $n\mathbb{Z}$ e $m\mathbb{Z}$ sono isomorfi solo se $n = m$, ossia solo se sono uguali.