Un esempio di corpo non commutativo è stato introdotto, nel 1843, dal matematico, fisico ed astronomo irlandese Sir William Rowan Hamilton (1805-1865). L'insieme soggiacente è $\mathbb{R}^4$, spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ avente come base quella formata dagli elementi

$\mathbf{1} = (1,0,0,0)$
$\boldsymbol{i} = (0,1,0,0)$
$\boldsymbol{j} = (0,0,1,0)$
$\boldsymbol{k} = (0,0,0,1)$.

Di conseguenza, ogni elemento di $\mathbb{R}^4$ può essere scritto in uno ed in solo modo come loro combinazione lineare a coefficienti reali:

$$(a,b,c,d) = a\mathbf{1} + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k},$$

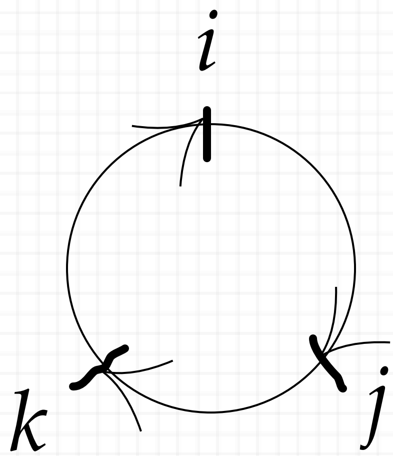
Alla struttura di gruppo additivo abeliano che $\mathbb{R}^4$ possiede come spazio vettoriale si aggiunge un prodotto definito nel modo seguente (ometteremo sistematicamente il simbolo di moltiplicazione):

$$(a\mathbf{1} + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k})(s\mathbf{1} + t\boldsymbol{i} + u\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}) = \begin{array}{l} as\mathbf{1} + bs\boldsymbol{i} + cs\boldsymbol{j} + ds\boldsymbol{k} + \\ at\boldsymbol{i} + bt\boldsymbol{i}^2 + ct\boldsymbol{ji} + dt\boldsymbol{ki} + \\ au\boldsymbol{j} + bu\boldsymbol{ij} + cu\boldsymbol{j}^2 + du\boldsymbol{kj} + \\ av\boldsymbol{k} + bv\boldsymbol{ik} + cv\boldsymbol{jk} + dv\boldsymbol{k}^2 \end{array}$$

ove:

- $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -\mathbf{1}$
- $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k};\ \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i}; \boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j};$
- $\boldsymbol{ji} = -\boldsymbol{k};\ \boldsymbol{kj} = -\boldsymbol{i};\ \boldsymbol{ik} = -\boldsymbol{j}.$

Si verifica che con queste due operazioni di somma e prodotto, $\mathbb{R}^4$ è un anello unitario, non commutativo, avente come elemento neutro del prodotto $\mathbf{1}$. Lo si chiama ***corpo dei quaternioni reali,*** e lo si indica con $\mathbb{H}$. Si vede facilmente che il sottoinsieme dei quaternioni della forma $(a,b,0,0)$ è isomorfo al campo complesso, mentre quello dei quaternioni della forma $(a,0,0,0)$ è isomorfo al campo reale. Mediante questo secondo isomorfismo, si potrà identificare il quaternione $(a,0,0,0)$ con il numero reale a.
Per ogni quaternione $q = (a,b,c,d)$ è definito il ***quaternione coniugato*** $\overline{q} = (a,-b,-c,-d)$. Si verifica che $q \cdot \overline{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Questo numero reale, detto ***norma*** del quaternione q, e indicato con $||q||$, è sempre non nullo se q è diverso dallo zero di $\mathbb{H}$, che è $(0,0,0,0)$. In tal caso q è invertibile, con inverso $\frac{1}{||q||}\overline{q}$. Quindi $\mathbb{H}$ è un corpo.



Relazioni fondamentali:

$$\boxed{\begin{array}{l} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ijk = -1 \end{array}}$$

$\Downarrow$ ad esempio

$$ik = -j$$

Infatti:

$$i^2 = k^2 = -1 \Rightarrow i^{-1} = -i,\ k^{-1} = -k.$$

Ma allora:

$$ijk = -1 \Rightarrow j = -i^{-1}k^{-1} = -ik.$$