Intorno all'origine dei *corpi*

Il termine italiano *corpo* (a cui corrisponde il francese *corps*) deriva dal nome *Körper*, introdotto dal matematico tedesco Richard Dedekind (1831-1916) in un'opera del 1871 (edita per la prima volta nel 1863), contenente una trascrizione commentata del corso di teoria dei numeri tenuto presso l'università di Göttingen da Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859). Il brano che segue è tratto dal *Supplemento XI* alle lezioni, nella versione del 1894. Esso costituisce il punto di partenza per lo sviluppo di un'aritmetica generale, che riproduca ed estenda quella dei numeri interi, e si applichi, in particolare, a strutture emergenti dallo studio della risolubilità di *equazioni diofantee* (polinomiali, in più incognite, a coefficienti interi, di cui si cercano le soluzioni intere). Inoltre, vi compare, in una nota in calce, un'esplicita giustificazione del termine scelto da Dedekind per designare la nuova struttura algebrica.

§ 160.

Um dieses Ziel zu erreichen, müssen wir uns vor allem mit den wichtigsten Grundlagen der heutigen Algebra beschäftigen, was in den nächsten Paragraphen (bis § 167) geschehen soll. Den Ausgangspunkt für unsere Darstellung dieses Gegenstandes bildet der folgende, schon oben erwähnte Begriff:

Ein System A von reellen oder komplexen Zahlen a soll ein Körper*) heißen, wenn die Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten von je zwei dieser Zahlen a demselben System A angehören.

Dieselbe Eigenschaft sprechen wir auch so aus, daß die Zahlen eines Körpers sich durch die rationalen Operationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) reproduzieren. Hierbei sehen wir es als selbstverständlich an, daß die Zahl Null niemals den Nenner eines Quotienten bilden kann; wir setzen deshalb auch immer voraus, daß ein Körper mindestens eine von Null verschiedene Zahl enthält, weil sonst von einem Quotienten innerhalb dieses Systems gar nicht gesprochen werden könnte.

*) Vgl. § 159 der zweiten Auflage dieses Werkes (1871). Dieser Name soll, ähnlich wie in den Naturwissenschaften, in der Geometrie und im Leben der menschlichen Gesellschaft, auch hier ein System bezeichnen, das eine gewisse Vollständigkeit, Vollkommenheit, Abgeschlossenheit besitzt, wodurch es als ein organisches Ganzes, als eine natürliche Einheit erscheint. Anfangs, in meinen Göttinger Vorlesungen (1857 bis 1858), hatte ich denselben Begriff mit dem Namen eines rationalen Gebietes belegt, der aber weniger bequem ist. Der Begriff fällt im wesentlichen zusammen mit dem, was Kronecker einen Rationalitätsbereich genannt hat (Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. 1882). Vgl. auch die von H. Weber und mir verfaßte Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen (Crelles Journal, Bd. 92, 1882).

Traduzione: *Per raggiungere questo scopo, dobbiamo anzitutto occuparci dei principali fondamenti dell'attuale algebra, il che avverrà nei prossimi paragrafi* (§167). *Il punto di partenza per la nostra presentazione di questo oggetto è costituito dal seguente concetto, già precedentemente citato:*

Un sistema A di numeri reali o complessi sarà detto ***corpo**** *se le somme, le differenze, i prodotti e i quozienti di due di questi numeri* ***a*** *appartengono allo stesso sistema A.*

Formuliamo la stessa proprietà anche dicendo che i numeri di un corpo si ***riproducono*** *tramite le operazioni razionali (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione). Qui diamo per scontato che il numero zero non possa mai essere il denominatore di un quoziente; perciò assumiamo sempre che un corpo contenga almeno un elemento diverso da zero, perché altrimenti non si potrebbe proprio parlare di un quoziente all'interno di tale sistema.*

Nota: *) *[...] Questo nome deve, analogamente a quanto avviene nelle scienze naturali, nella geometria e nella vita della società umana, designare anche qui un <u>sistema, che possiede una certa completezza, perfezione, chiusura, in virtù delle quali appare come un tutto organico, un'unità naturale</u>. Inizialmente [...] avevo indicato lo stesso concetto con il nome di dominio di razionalità, che, però, è meno conveniente. [...]*

Nel successivo paragrafo, Dedekind così prosegue:

§ 161.

Es geschieht in der Mathematik und in anderen Wissenschaften sehr häufig, daß, wenn ein System A von Dingen oder Elementen a vorliegt, jedes bestimmte Element a nach einem gewissen Gesetze durch ein bestimmtes, ihm entsprechendes Element a' ersetzt wird (welches in A enthalten sein kann oder auch nicht); ein solches Gesetz pflegt man eine Substitution zu nennen, und man sagt, daß durch diese Substitution das Element a in das Element a', und ebenso das System A in das System A' der Elemente a' übergeht *).

*) Schon in der dritten Auflage dieses Werkes (1879, Anmerkung auf S. 470) ist ausgesprochen, daß auf dieser Fähigkeit des Geistes, ein Ding a mit einem Ding a' zu vergleichen, oder a auf a' zu beziehen, oder dem a ein a' entsprechen zu lassen, ohne welche überhaupt kein Denken möglich ist, auch die gesamte Wissenschaft der Zahlen beruht. Die Durchführung dieses Gedankens ist seitdem veröffentlicht in meiner Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen?" (Braunschweig 1888); die daselbst angewandte Bezeichnungsweise für Abbildungen und deren Zusammensetzung weicht äußerlich von der hier gebrauchten ein wenig ab.

Traduzione: *Accade molto spesso nella matematica e nelle altre scienze che, quando si è in presenza di un sistema A di cose o elementi* ***a****, ogni determinato elemento* ***a*** *venga sostituito, secondo una certa legge, con un elemento* ***a'*** *che gli corrisponde (e che può essere o no contenuto in A); si suole chiamare una siffatta legge una* ***sostituzione****, e si dice che tramite questa sostituzione l'elemento* ***a*** *viene trasformato nell'elemento* ***a'*** *e anche, allo stesso modo, che il sistema* ***A*** *viene trasformato nel sistema* ***A'*** *degli elementi* ***a'*** *).

Nota: *) *[...] su questa capacità della mente, di confrontare una cosa* ***a*** *con una cosa* ***a'****, o di riferire* ***a*** *ad* ***a'****, oppure far corrispondere ad un* ***a*** *un* ***a'****, senza la quale non è proprio possibile alcuna forma di pensiero, si fonda l'intera scienza dei numeri [...]*

Come emerge chiaramente anche da altri testi di Dedekind, egli pone alla base della sua visione della matematica la nozione di *Abbildung*: letteralmente, significa *raffigurazione*, ma questo è il termine tedesco che in italiano si traduce come *applicazione*. L'idea è che un insieme si "specchi" in un altro attraverso una corrispondenza tra i rispettivi elementi che, complessivamente, riproduce l'insieme di partenza come in un quadro. Affinché la rappresentazione sia significativa, è però necessario che vengano conservate le relazioni fondamentali tra le parti: nel caso di una struttura algebrica come un corpo, ciò equivale a richiedere che, nell'insieme di arrivo, possano essere effettuate, in parallelo, le operazioni aritmetiche eseguite nell'insieme di partenza. Se si indica con un apice l'elemento che "sostituisce" un certo elemento iniziale, ciò significa che devono valere, per una qualsiasi coppia di elementi u e v del corpo di partenza, le seguenti uguaglianze, che Dedekind chiama *leggi fondamentali*:

$$(1) \qquad (u+v)' = u' + v'$$
$$(2) \qquad (u-v)' = u' - v'$$
$$(3) \qquad (uv)' = u'v'$$
$$(4) \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}.$$

Quindi Dedekind osserva che, affinché la (4) abbia senso, ossia sussista almeno in un caso, occorre che non tutti gli elementi dotati di apice siano nulli. Se l'applicazione fra due corpi verifica le leggi fondamentali e soddisfa anche questa condizione aggiuntiva, osserva Dedekind, allora stabilisce quella che noi chiameremmo una corrispondenza biunivoca fra *A* e la sua *immagine A'*, che è sua volta un corpo (noi diremmo: isomorfo al precedente). In effetti si può dimostrare che il nucleo di un omomorfismo di corpi non banale è sempre ridotto allo zero. In tal caso Dedekind chiama l'applicazione una *permutazione* (si noti che, come in Galois, è il risultato complessivo di una serie di *sostituzioni* effettuate sui singoli elementi di un *sistema*).

In conclusione, alcune ulteriori annotazioni linguistiche.

- Il termine *campo* da noi adottato per indicare un *corpo commutativo* è la traduzione dell'inglese *field*, termine introdotto in ambito anglosassone alla fine dell'Ottocento per indicare i *corpi finiti* (e quindi necessariamente commutativi, in base al teorema di Wedderburn).
- Il termine inglese *map* o *mapping* è la traduzione del tedesco *Abbildung*, e di questo termine riprende il significato di *ritratto schematico e complessivo*. D'altra parte, la radice indoeuropea *bil* della parola *Bild* (immagine) risiede nell'idea di *composizione* e di *forma rotonda*, che contiene anche il concetto di completezza, visione di insieme (vedi le parole basche *bildu* "raccogliere, riunire", e *bildur* "paura": quella che spinge gli uomini a fare gruppo). Questa è anche l'origine del nostro uso di *immagine* nell'ambito della teoria delle applicazioni.