5.51 Sia D un anello commutativo unitario integro, di cardinalità finita $n > 1$. Sia $D = \{a_1, \dots, a_n\}$. Sia $a \in D$ un elemento non nullo. Possiamo supporre che sia $a = a_1$. Poiché, per ipotesi, D è integro, l'elemento a è regolare, quindi è cancellabile in virtù della Proposizione 5.21. Ne consegue che gli elementi $aa_1, \dots, aa_n$ sono a due a due distinti, e dunque sono tutti gli elementi di D. In particolare esiste un indice i tale che $aa_i = 1 = a_i a$. Si ricordi, a tal proposito, che D è commutativo. Ciò prova che a è invertibile. Data l'arbitrarietà con cui è stato scelto a, ciò prova che ogni elemento non nullo di D è invertibile. Concludiamo allora che D è un campo.

In realtà vale un risultato più forte:

Ogni anello integro finito non banale è un corpo.

Dimostrazione: Si tratta di provare che esiste l'elemento neutro del prodotto e che ogni elemento non nullo dell'anello è invertibile. Sia A un anello integro finito di cardinalità $n > 1$, sia $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Detto $a = a_1$ un suo elemento non nullo, dalla cancellabilità di a a sinistra si deduce come sopra l'esistenza di un indice i tale che $a = aa_i$. Ma allora $a^2 = aa_i a$, da cui, cancellando a a sinistra, si ricava che $a = a_i a$. Sia ora $b \in A$, $b \neq 0$. Dalla cancellabilità di a a destra si deduce, analogamente a sopra, che, per qualche indice j, $b = a_j a$. Ma allora $b = a_j a a_i = b a_i$. Di nuovo, da $b^2 = b a_i b$, si deduce che $b = a_i b$. Ciò prova che, per ogni $x \in A$ non nullo $x a_i = a_i x = x$. La proprietà vale però banalmente anche per $x = 0$. Dunque a_i è elemento neutro (1) del prodotto. Ora, per la cancellabilità di a a sinistra, esiste un indice k tale che $aa_k = 1$. Quindi $aa_k a = 1 \cdot a = a \cdot 1$, da cui, cancellando a a sinistra, $a_k a = 1$. Ciò prova che a è invertibile, essendo a_k il suo inverso. Stante l'arbitrarietà di a, ciò completa la dimostrazione.

Con ulteriori strumenti teorici, si può provare anche la commutatività. Vale infatti il famoso

Teorema di Wedderburn: Ogni anello integro finito non banale **è un campo**.