Esercizio: Determinare il gruppo degli automorfismi del gruppo di Klein.

Svolgimento: Sia G un gruppo moltiplicativo di ordine 4 in cui ogni elemento è inverso di sé stesso. Detto 1 il suo elemento neutro, siano x_1, x_2, x_3 i suoi restanti tre elementi. Ricordiamo che

$$\text{se } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}, \qquad \text{allora} \qquad x_i x_j = x_k. \tag{1}$$

Ogni automorfismo di G, dovendo inviare 1 in 1, induce una permutazione sui restanti elementi x_1, x_2, x_3. Sia $\sigma \in S_3$ una qualsiasi permutazione su $\{1, 2, 3\}$. Proviamo che l'applicazione $f_\sigma : G \to G$ definita da $1 \mapsto 1$ e $x_i \mapsto x_{\sigma(i)}$ per ogni indice i è un endomorfismo di G. Allora sarà necessariamente un automorfismo. Da ciò dedurremo che Aut(G) ha esattamente 6 elementi (in effetti, si potrà dimostrare che l'assegnazione $\sigma \mapsto f_\sigma$ definisce un isomorfismo tra S_3 ed Aut(G)).

Sia $x \in G$. Allora $f_\sigma(x \cdot 1) = f_\sigma(x) = f_\sigma(x) \cdot 1 = f_\sigma(x) f_\sigma(1)$. Analogamente si prova che $f_\sigma(1 \cdot x) = f_\sigma(1) f_\sigma(x)$.

Si ha inoltre

$$f_\sigma(x \cdot x) = f_\sigma(1) = 1 = f_\sigma(x) f_\sigma(x),$$

poiché ogni elemento di G è inverso di sé stesso.
Siano ora $i, j \in \{1, 2, 3\}$ indici distinti. Se k è il restante indice, si ha, in base alla (1),

$$f_\sigma(x_i x_j) = f_\sigma(x_k) = x_{\sigma(k)},$$

mentre

$$f_\sigma(x_i) f_\sigma(x_j) = x_{\sigma(i)} x_{\sigma(j)}.$$

Ma, data l'iniettività di σ, i tre indici $\sigma(i), \sigma(j), \sigma(k)$ sono a due a due distinti. Ne consegue, alla luce della (1), che

$$x_{\sigma(i)} x_{\sigma(j)} = x_{\sigma(k)}.$$

Ciò completa la dimostrazione che, per ogni $x, y \in G$, $f_\sigma(xy) = f_\sigma(x) f_\sigma(y)$. Pertanto è stato provato che f_σ è un omomorfismo, come volevasi.