Esercizio*: Sia G un gruppo moltiplicativo finito. Consideriamo l'applicazione $f : G \longrightarrow G$, $x \mapsto x^2$. Determinare una condizione necessaria e sufficiente affinché f sia un endomorfismo. In tali ipotesi, determinare una condizione necessaria e sufficiente affinché f sia un automorfismo.

Svolgimento: L'applicazione è un omomorfismo se e solo se per ogni $x, y \in G$ si ha che

$$(xy)^2 = x^2y^2,$$

ossia

$$xxyy = xyxy,$$

ossia, per cancellabilità (di x a sinistra e di y a destra):

$$xy = yx.$$

Ciò prova che f è un omomorfismo se e solo se G è abeliano.

Poiché G è finito, l'applicazione f è bigettiva se e solo se è iniettiva. Nell'ipotesi che f sia omomorfismo, ciò avviene se e solo se Ker$f = \{1_G\}$. Ciò si verifica se e solo se $x = 1_G$ è l'unico elemento di G tale che $x^2 = 1_G$, ossia l'elemento neutro è l'unico elemento di G ad essere simmetrico di sé stesso. Sappiamo che ciò vale se e solo se l'ordine di G è dispari. In sintesi, f è un automorfismo se e solo se G è abeliano di ordine dispari.