Domanda

Siano $G_1,\ G_2$ gruppi, e sia $f: G_1 \to G_2$ un omomorfismo di gruppi. Quale relazione sussiste tra l'abelianità di G_1 e/o G_2 se

- f è monomorfismo
- f è epimorfismo?

Risposta

- Se f è monomorfismo, allora: se G_2 è abeliano, anche G_1 è abeliano.

Dimostrazione: Siano $x, y \in G_1$. Stante l'abelianità di G_2, e tenendo conto del fatto che f è omomorfismo, si ha

$$f(x *_1 y) = f(x) *_2 f(y) = f(y) *_2 f(x) = f(y *_1 x) .$$

Essendo f iniettivo, ne consegue che $x *_1 y = y *_1 x$. Ciò prova che G_1 è abeliano.

- Se f è epimorfismo, allora: se G_1 è abeliano, anche G_2 è abeliano.

Dimostrazione: Siano $u, v \in G_2$. Essendo f suriettivo, esistono $x, y \in G_1$ tali che $f(x) = u,\ f(y) = v$. Stante l'abelianità di G_1, e tenendo conto del fatto che f è omomorfismo, si ha

$$u *_2 v = f(x) *_2 f(y) = f(x *_1 y) = f(y *_1 x) = f(y) *_2 f(x) = v *_2 u .$$

Ciò prova che G_2 è abeliano.

Nota aggiuntiva

Si osservi come nel caso in cui f sia monomorfismo, resti indotto, per corestrizione, un isomorfismo

$$f: G_1 \to f(G_1).$$

Ne consegue che G_1 è isomorfo ad un sottogruppo di G_2 (ossia al sottogruppo $f(G_1)$). Poiché ogni sottogruppo di un gruppo abeliano è abeliano, se G_2 è abeliano, allora anche G_1 lo è.