Esercizio: Determinare il gruppo degli automorfismi di un gruppo isomorfo al gruppo R_4 (secondo modello).

<u>Svolgimento:</u> Siano e, x, y, z gli elementi del gruppo $(G, *)$, ove e è l'elemento neutro, x e y sono l'uno il simmetrico dell'altro, e z è simmetrico di sé stesso. Appartengono ad Aut(G):

- l'automorfismo identico;
- l'automorfismo che invia ogni elemento nel proprio simmetrico (ossia scambia x e y e lascia fissi e e z).

Non vi sono altri elementi di Aut(G). Infatti, se $f \in$ Aut(G), allora:

- $f(x) \neq e$, perché f è un monomorfismo;
- se $f(x) = x$, allora, per la proprietà di conservazione dei simmetrici, $f(y) = y$; dovendo poi essere $f(e) = e$, si ha necessariamente $f(z) = z$, e pertanto f è l'automorfismo identico;
- se $f(x) = y$, allora, per la proprietà di conservazione dei simmetrici, $f(y) = x$; dovendo poi essere $f(e) = e$, si ha $f(z) = z$, e pertanto f è l'automorfismo che scambia x e y;
- $f(x) \neq z$, perché altrimenti, per la proprietà di conservazione dei simmetrici, dovrebbe essere $f(y) = z$, contro l'iniettività.

In conclusione, Aut(G) ha ordine 2.