Esercizio 3.17 b)-f)

b) Il gruppo di partenza è additivo, quello di arrivo è moltiplicativo. Siano $a, b \in \mathbb{Z}$. Allora $f(a+b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = f(a) \cdot f(b)$. Ciò prova che f è un omomorfismo di gruppi. Il suo nucleo è $Kerf = \{a \in \mathbb{Z} | 2^a = 1\} = \{0\}$. Ciò prova che f è un monomorfismo. La sua immagine è l'insieme delle potenze di 2 con coefficiente intero, che è un sottogruppo proprio di $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$. In particolare, f non è un epimorfismo.

c) Il gruppo di partenza e di arrivo è moltiplicativo. Siano $x, y \in \mathbb{R}^*$. Allora $f(xy) = (xy)^2 = x^2y^2 = f(x)f(y)$. Ciò prova che f è un omomorfismo. Il suo nucleo è $Kerf = \{x \in \mathbb{R}^* | x^2 = 1\} = \{1, -1\}$. Dunque f non è un monomorfismo. La sua immagine è l'insieme dei numeri reali positivi, dunque f non è un epimorfismo.

<u>In generale</u>: Se G è un gruppo moltiplicativo **commutativo**, allora l'applicazione $f : G \longrightarrow G$ definita ponendo, per ogni $x \in G$, $f(x) = x^2$, è un omomorfismo di gruppi. La commutatività serve a garantire che, per ogni $x, y \in G$, si abbia

$$(xy)^2 = (xy)(xy) = x(\mathbf{yx})y = x(\mathbf{xy})y = (xx)(yy) = x^2y^2.$$

In assenza di tale ipotesi, la proprietà di omomorfismo non può essere derivata, e, in generale, non è soddisfatta.

d) Lo svolgimento è analogo a quello del punto c). Si prova allo stesso modo che f è un omomorfismo. Questa volta, però, $Kerf = \{x \in \mathbb{R}^* | x^3 = 1\} = \{1\}$, e dunque f è un monomorfismo. Inoltre, la sua immagine è tutto $\mathbb{R}^*$ (perché da ogni numero reale è possibile estrarre in $\mathbb{R}$ la radice cubica, e la radice cubica di un numero reale non nullo è non nulla). Dunque f è un epimorfismo. Ne consegue che f è un automorfismo del gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}^*$. Ha come automorfismo inverso l'applicazione $x \mapsto \sqrt[3]{x}$.

e) L'applicazione f non è un omomorfismo (di gruppi additivi), dato che non verifica la proprietà di conservazione dell'elemento zero: infatti $f(0) = 1$. La sua immagine è tutto $\mathbb{R}$, quindi è comunque surgettiva. Inoltre è evidentemente iniettiva. In effetti, è invertibile, con inversa data dall'applicazione $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tale che $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x - 1$.

f) Si può definire l'applicazione assegnata mediante una formula chiusa: infatti, per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $f(a) = (-1)^a$. Allora si prova la proprietà di omomorfismo come in (b). Evidentemente f è un epimorfismo. Il suo nucleo è l'insieme degli interi pari. Quindi f non è un monomorfismo.