

Gruppi di ordine 5

*	<i>e</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>w</i>
<i>e</i>	<i>e</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>w</i>
<i>x</i>	<i>x</i>				
<i>y</i>					
<i>z</i>	<i>z</i>				
<i>w</i>	<i>w</i>				

Nessun elemento diverso da *e* è simmetrico di sé stesso. Possiamo supporre che

- *x* e *y* siano l'uno il simmetrico dell'altro;
- *z* e *w* siano l'uno il simmetrico dell'altro.

<i>e</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>w</i>
<i>x</i>		<i>e</i>		
<i>y</i>	<i>e</i>			
<i>z</i>				<i>e</i>
<i>w</i>			<i>e</i>	

Si osserva che $x * z \in \{y, w\}$. Supponiamo che sia $x * z = y$. Per la commutatività (di cui gode ogni gruppo di ordine 5) sarà anche $z * x = y$.

<i>e</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>w</i>
<i>x</i>		<i>e</i>	<i>y</i>	
<i>y</i>	<i>e</i>			
<i>z</i>	<i>y</i>			<i>e</i>
<i>w</i>			<i>e</i>	

Il resto si completa sulla base della cancellabilità:

<i>e</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>w</i>
<i>x</i>		<i>e</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
<i>y</i>	<i>e</i>			
<i>z</i>	<i>y</i>			<i>e</i>
<i>w</i>	<i>z</i>		<i>e</i>	

<i>e</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>w</i>
<i>x</i>	<i>w</i>	<i>e</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
<i>y</i>	<i>e</i>			<i>x</i>
<i>z</i>	<i>y</i>			<i>e</i>
<i>w</i>	<i>z</i>	<i>x</i>	<i>e</i>	

<i>e</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>w</i>
<i>x</i>	<i>w</i>	<i>e</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
<i>y</i>	<i>e</i>			<i>x</i>
<i>z</i>	<i>y</i>			<i>e</i>
<i>w</i>	<i>z</i>	<i>x</i>	<i>e</i>	<i>y</i>

<i>e</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>w</i>
<i>x</i>	<i>w</i>	<i>e</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
<i>y</i>	<i>e</i>		<i>w</i>	<i>x</i>
<i>z</i>	<i>y</i>	<i>w</i>		<i>e</i>
<i>w</i>	<i>z</i>	<i>x</i>	<i>e</i>	<i>y</i>

Ed ecco la tabella completa:

e	x	y	z	w
x	w	e	y	z
y	e	z	w	x
z	y	w	x	e
w	z	x	e	y

La struttura è univocamente determinata, a meno di scambiare i nomi degli elementi.
Riscriviamo la tabella riordinando righe e colonne:

e	x	w	z	y
x	w	z	y	e
w	z	y	e	x
z	y	e	x	w
y	e	x	w	z

Questa è la struttura di R_5 , il gruppo delle radici quinte dell'unità. Posto $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, si ha infatti che $R_5 = \{\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4\}$.

α^0	α^1	α^2	α^3	α^4
α^1	α^2	α^3	α^4	α^0
α^2	α^3	α^4	α^0	α^1
α^3	α^4	α^0	α^1	α^2
α^4	α^0	α^1	α^2	α^3