

## Gruppi di ordine 5

*	$e$	$x$	$y$	$z$	$w$
$e$	$e$	$x$	$y$	$z$	$w$
$x$	$x$				
$y$	$y$				
$z$	$z$				
$w$	$w$				

Nessun elemento diverso da  $e$  è simmetrico di sé stesso. Possiamo supporre che

- $x$  e  $y$  siano l'uno il simmetrico dell'altro;
- $z$  e  $w$  siano l'uno il simmetrico dell'altro.

$e$	$x$	$y$	$z$	$w$
$x$		$e$		
$y$	$e$			
$z$				$e$
$w$			$e$	

Si osserva che  $x*z \in \{y, w\}$ . Supponiamo che sia  $x*z = y$ . Per la commutatività (di cui gode ogni gruppo di ordine 5) sarà anche  $z*x = y$ .

$e$	$x$	$y$	$z$	$w$
$x$		$e$	$y$	
$y$	$e$			
$z$	$y$			$e$
$w$			$e$	

Il resto si completa sulla base della cancellabilità:

$e$	$x$	$y$	$z$	$w$
$x$		$e$	$y$	$\textcolor{red}{z}$
$y$	$e$			
$z$	$y$			$e$
$w$	$\textcolor{red}{z}$		$e$	

$e$	$x$	$y$	$z$	$w$
$x$	$\textcolor{blue}{w}$	$e$	$y$	$\textcolor{red}{z}$
$y$	$e$			$\textcolor{green}{x}$
$z$	$y$			$e$
$w$	$\textcolor{red}{z}$	$\textcolor{brown}{x}$	$e$	

$e$	$x$	$y$	$z$	$w$
$x$	$\textcolor{blue}{w}$	$e$	$y$	$\textcolor{red}{z}$
$y$	$e$			$\textcolor{brown}{x}$
$z$	$y$			$e$
$w$	$\textcolor{red}{z}$	$\textcolor{brown}{x}$	$e$	$\textcolor{violet}{y}$

$e$	$x$	$y$	$z$	$w$
$x$	$\textcolor{blue}{w}$	$e$	$y$	$\textcolor{red}{z}$
$y$	$e$		$\textcolor{brown}{w}$	$\textcolor{green}{x}$
$z$	$y$	$\textcolor{brown}{w}$		$e$
$w$	$\textcolor{red}{z}$	$\textcolor{brown}{x}$	$e$	$\textcolor{violet}{y}$

Ed ecco la tabella completa:

$e$	$x$	$y$	$z$	$w$
$x$	$w$	$e$	$y$	$z$
$y$	$e$	$z$	$w$	$x$
$z$	$y$	$w$	$x$	$e$
$w$	$z$	$x$	$e$	$y$

La struttura è univocamente determinata, a meno di scambiare i nomi degli elementi.

Riscriviamo la tabella riordinando righe e colonne:

$e$	$x$	$w$	$z$	$y$
$x$	$w$	$z$	$y$	$e$
$w$	$z$	$y$	$e$	$x$
$z$	$y$	$e$	$x$	$w$
$y$	$e$	$x$	$w$	$z$

Questa è la struttura di  $R_5$ , il gruppo delle radici quinte dell'unità. Posto  $\alpha = e^{\frac{i\pi}{5}}$ , si ha infatti che  $R_5 = \{\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4\}$ .

$\alpha^0$	$\alpha^1$	$\alpha^2$	$\alpha^3$	$\alpha^4$
$\alpha^1$	$\alpha^2$	$\alpha^3$	$\alpha^4$	$\alpha^0$
$\alpha^2$	$\alpha^3$	$\alpha^4$	$\alpha^0$	$\alpha^1$
$\alpha^3$	$\alpha^4$	$\alpha^0$	$\alpha^1$	$\alpha^2$
$\alpha^4$	$\alpha^0$	$\alpha^1$	$\alpha^2$	$\alpha^3$