Gruppi di ordine 4

Sia $X = \{e, x, y, z\}$ un insieme di cardinalità 4. Vogliamo costruire su X tutte le possibili strutture di gruppo (a meno di ridenominazione degli elementi), rispetto ad un'operazione * per la quale e sia l'elemento neutro. Compileremo le relative tavole di composizione.

*	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x			
y	y			
z	z			

<u>PRIMO CASO</u>:

Supponiamo che ogni elemento sia simmetrico di sé stesso:

*	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	$\boldsymbol{e}$		
y	y		$\boldsymbol{e}$	
z	z			$\boldsymbol{e}$

*	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	e	z	y
y	y	z	e	x
z	z	y	x	e

per cancellabilità si inseriscono, nell'ordine, y, z e x. (●●●)

Quindi, nel caso in esame, la struttura di gruppo, se esiste, è unica.

SECONDO CASO:

Supponiamo che qualche elemento non sia simmetrico di sé stesso. Sia questo x, e sia y il suo simmetrico.

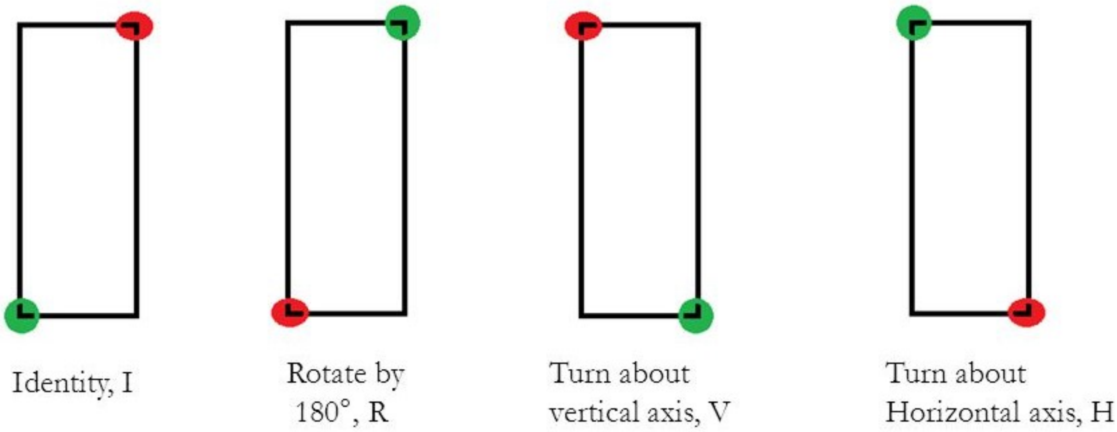
*	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x		$\boldsymbol{e}$	
y	y	$\boldsymbol{e}$		
z	z			

*	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	z	e	y
y	y	e	z	x
z	z	y	x	e

per cancellabilità si inseriscono, nell'ordine, y, z e x, ancora z e infine e. (●●●●●)

Anche in questo caso c'è un elemento che è simmetrico di sé stesso, ossia z.

<u>Primo modello</u>: L’insieme delle simmetrie di un rettangolo



	I	**R**	**V**	**H**
I	I	R	V	H
R	R	I	H	V
V	V	H	I	R
H	H	V	R	I

È certamente un gruppo rispetto alla composizione, operazione binaria definita sul nostro insieme, in quanto la composta di due simmetrie è ancora una simmetria.

- La composizione è associativa.
- L’elemento neutro è l’applicazione identica.
- L’inversa di una simmetria è una simmetria.

Inoltre ogni simmetria del rettangolo ha come inversa sé stessa. Dunque la struttura di gruppo corrisponde necessariamente al primo modello (che si conferma il modello di un gruppo).

Secondo modello: Le radici quarte di 1.

È l'insieme formato da 1, -1, i, $-i$. È un gruppo rispetto al prodotto. Precisamente, è il sottogruppo R_4 di $\mathbb{C}^*$ visto nell'Esercizio 2.27 b). Esso corrisponde necessariamente al secondo modello, in quanto gli unici elementi ad essere simmetrici di loro stessi sono 1 e -1. Gli altri due, i e $-i$, sono l'uno l'inverso dell'altro. Dunque gli elementi 1, i, $-i$ e -1, corrispondono, nell'ordine, agli elementi e, x, y, z della precedente tavola di composizione. La riportiamo qui sotto, nella forma originale e dopo aver effettuato la sostituzione con gli elementi 1, i, $-i$, -1, e poi dopo aver scambiato le ultime due righe e colonne.

*	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	z	e	y
y	y	e	z	x
z	z	y	x	e

●	1	i	$-i$	-1
1	1	i	$-i$	-1
i	i	-1	1	$-i$
$-i$	$-i$	1	-1	i
-1	-1	$-i$	i	1

●	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

La riscriviamo ancora in un'altra forma, e poi evidenziamo il comportamento degli esponenti

●	i^0	i^1	i^2	i^3
i^0	i^0	i^1	i^2	i^3
i^1	i^1	i^2	i^3	i^0
i^2	i^2	i^3	i^0	i^1
i^3	i^3	i^0	i^1	i^2

?	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Come si vedrà nella Lezione 8, quest'ultima tavola di composizione descrive l'operazione del gruppo additivo su $\mathbb{Z}_4$:

$+_{\mathbb{Z}_4}$	$[0]_4$	$[1]_4$	$[2]_4$	$[3]_4$
$[0]_4$	$[0]_4$	$[1]_4$	$[2]_4$	$[3]_4$
$[1]_4$	$[1]_4$	$[2]_4$	$[3]_4$	$[0]_4$
$[2]_4$	$[2]_4$	$[3]_4$	$[0]_4$	$[1]_4$
$[3]_4$	$[3]_4$	$[0]_4$	$[1]_4$	$[2]_4$