Gruppi di ordine 4

Sia $X = \{e, x, y, z\}$ un insieme di cardinalità 4. Vogliamo costruire su X tutte le possibili strutture di gruppo (a meno di ridenominazione degli elementi), rispetto ad un'operazione * per la quale e sia l'elemento neutro. Compileremo le relative tavole di composizione.

$*$	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x			
y	y			
z	z			

<u>PRIMO CASO</u>:

Supponiamo che ogni elemento sia simmetrico di sé stesso:

$*$	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	e		
y	y		e	
z	z			e

$*$	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	e		
y	y		e	
z	z			e

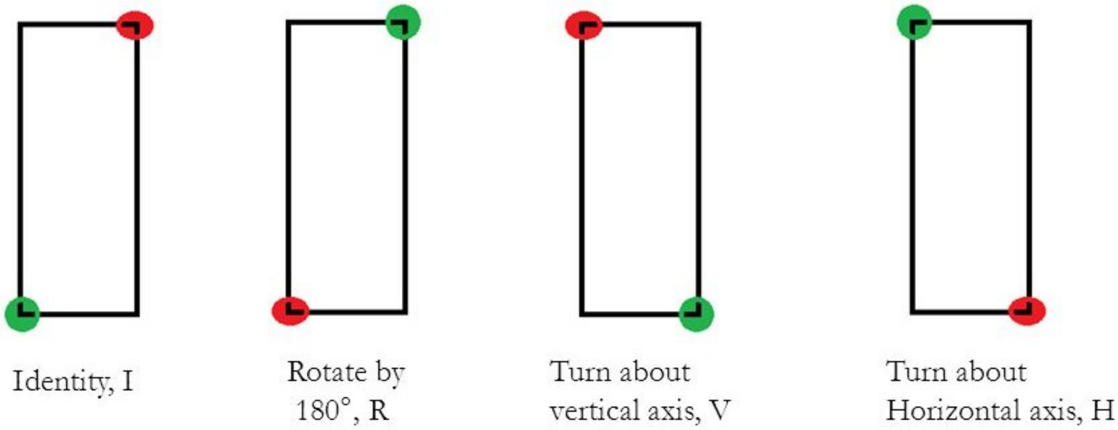
SECONDO CASO:

Supponiamo che qualche elemento non sia simmetrico di sé stesso. Sia questo x, e sia y il suo simmetrico.

$*$	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x			
y	y			
z	z			

$*$	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x		e	
y	y	e		
z	z			

Primo modello: L’insieme delle simmetrie di un rettangolo.



	I	**R**	**V**	**H**
I	I	R	V	H
R	R	I	H	V
V	V	H	I	R
H	H	V	R	I

Perché questo è un gruppo?

Secondo modello: Le radici quarte di 1.

È l'insieme formato da 1, -1, *i*, -*i*. È un gruppo rispetto al prodotto. Precisamente, è il sottogruppo R_4 di $\mathbb{C}$ visto nell'Esercizio 2.27 b). Esso corrisponde necessariamente al secondo modello, in quanto gli unici elementi ad essere simmetrici di loro stessi sono 1 e -1. Gli altri due, *i* e -*i*, sono l'uno l'inverso dell'altro. Dunque gli elementi 1, *i*, -*i* e -1, corrispondono, nell'ordine, agli elementi *e, x*, *y*, *z* della precedente tavola di composizione. La riportiamo qui sotto, nella forma originale e dopo aver effettuato la sostituzione con gli elementi 1, *i*, -*i*, -1, e, infine, dopo aver scambiato le ultime due righe e colonne.

*	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	z	e	y
y	y	e	z	x
z	z	y	x	e

•	1	i	$-i$	-1
1	1	i	$-i$	-1
i	i	-1	1	$-i$
$-i$	$-i$	1	-1	i
-1	-1	$-i$	i	1

•	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

La riscriviamo ancora in un'altra forma, e poi evidenziamo il comportamento degli esponenti.

•	i^0	i^1	i^2	i^3
i^0	i^0	i^1	i^2	i^3
i^1	i^1	i^2	i^3	i^0
i^2	i^2	i^3	i^0	i^1
i^3	i^3	i^0	i^1	i^2

?	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2