I gruppi e la geometria

Il matematico francese Henri Poincaré (1854-1912) dedica il capitolo IV della sua opera *La science et l'hypothèse* (1902) ad una riflessione sulla natura della geometria. La presenta come l'immagine, in uno *spazio rappresentativo*, delle sensazioni da noi provate, a livello fisico, sia come *percezione visiva*, sia come *sforzo muscolare*. Queste servono a formare in noi l'esperienza del *movimento* (relativo, tra noi e un oggetto che osserviamo): questo è alla base della nozione di *posizione* (il concetto che popola lo *spazio geometrico*), che trae origine dal fenomeno dello *spostamento*. La collocazione di un punto è individuata dal percorso necessario a raggiungerlo a partire da un certo altro punto di riferimento (che potrebbe trovarsi nello stesso osservatore). In altri termini, la geometria è inscindibile dal *sentimento della direzione*, di cui prendiamo coscienza sia attraverso la vista, sia attraverso il moto di tutta la nostra persona. Esso si esprime attraverso un'astrazione, che ci porta a considerare come uguali due spostamenti effettuati da due corpi, il primo conducente dallo stato iniziale A allo stato finale B, il secondo dallo stato iniziale A' allo stato finale B', purché coincidano, in entrambi i casi, la posizione iniziale α e la posizione finale β. Nella nostra visione dell'algebra astratta, α e β possono essere considerati elementi di un gruppo, che rappresentano ogni *cosa* si trovi in quelle posizioni, indipendentemente dalla sua specifica natura. E lo spostamento, univocamente individuato da α e β (in quest'ordine), è a sua volta rappresentato dall'unico elemento γ del gruppo tale che $\alpha\gamma = \beta$. Qui trova conferma l'idea di Poincaré secondo cui posizione e spostamento siano le due facce della stessa idea, che si compone dunque di una parte statica e di una dinamica. Allo stesso tempo, ritroviamo la centralità attribuita da Heinrich Weber alla possibilità, da lui inclusa nella definizione di gruppo, di risolvere univocamente l'equazione precedente, in cui si assumono dati due elementi, mentre il terzo funge da incognita. Uguale rilievo è dato Poincaré a quella che noi conosciamo come *esistenza degli elementi simmetrici*: citiamo testualmente un brano del saggio, in una traduzione in italiano:

> Noi vediamo innanzitutto che le nostre impressioni sono soggette a cambiamento; ma siamo ben presto indotti a operare delle distinzioni fra i cambiamenti che constatiamo.
>
> Noi diciamo sia che gli oggetti, causa delle impressioni, hanno cambiato stato, sia che essi hanno cambiato posizione, che si sono semplicemente spostati.
>
> Il fatto che un oggetto cambi di stato o soltanto di posizione, si traduce per noi sempre in uno stesso modo: *con una modificazione in un insieme di impressioni.*
>
> Come abbiamo potuto, dunque, arrivare a distinguerli? Rendersene conto è facile. Se si è verificato soltanto un cambiamento di posizione, possiamo ricostruire l'insieme primario d'impressioni compiendo dei movimenti che ci riportino faccia a faccia con l'oggetto mobile nella medesima situazione *relativa*. *Correggiamo*, così, la modificazione che si era prodotta e ristabiliamo lo stato iniziale attraverso una modificazione contraria.

L'intervento che produce la *modificazione contraria* è, ben inteso, un'azione compiuta da un soggetto che opera dall'esterno sull'oggetto: è l'unica a noi accessibile – nel momento in cui lavoriamo con gli strumenti propri del gruppo – mentre rimane fuori dalla nostra portata la deformazione

dell'oggetto (di cui noi non consideriamo minimamente la composizione, la forma, il colore, nessuna delle sue qualità intrinseche).
Finora abbiamo parlato del gruppo unicamente come insieme di *modificazioni*. Tuttavia, secondo la visione di Felix Klein, il gruppo è anzitutto un insieme di *simmetrie*, ossia di trasformazioni che lasciano invariate determinate figure geometriche (a due o tre dimensioni). Ancora una volta, siamo di fronte ai due aspetti complementari dello stesso concetto. Infatti, osserva Poincaré, affinché si possa riconoscere lo spostamento sopra descritto, occorre che il corpo che lo compie sia rimasto uguale a sé stesso, e tale resti anche nel caso in cui lo spostamento venisse ripercorso a ritroso. Per noi ciò corrisponde precisamente al gruppo di trasformazioni della geometria euclidea, le cosiddette *isometrie*. Queste si caratterizzano per il fatto di conservare le distanze, ossia le posizioni relative dei punti che costituiscono una qualsiasi figura. Nell'ambito di tali isometrie, possiamo poi distinguere quelle che mantengono i punti di una certa figura all'interno della stessa figura, ossia quegli spostamenti che non ne facciano uscire alcuno dalla figura stessa. Queste sono le *simmetrie* della figura propriamente dette.

Viceversa:
- si può definire una geometria, a partire da un gruppo di trasformazioni dello *spazio rappresentativo*, considerando *equivalenti* due figure se esiste un elemento del gruppo che trasforma l'una nell'altra;
- si può costruire un oggetto, di cui un gruppo assegnato sia un gruppo di simmetrie, applicando ad una figura iniziale tutti gli elementi del gruppo, e prendendo quindi l'unione delle immagini ottenute.

Un semplice esempio del secondo tipo è dato dal gruppo delle rotazioni del piano intorno a un punto C assegnato: applicandole tutte ad un punto P distinto da questo, si ottiene la circonferenza di centro C passante per P, e per questa figura il gruppo assegnato è un gruppo di simmetrie (benché non il gruppo di *tutte* le simmetrie, fra cui figurano anche le simmetrie assiali rispetto ai diametri).

Quanto al primo tipo, si noti come l'equivalenza indicata sia effettivamente una *relazione riflessiva, simmetrica e transitiva*, in virtù delle proprietà verificate da ogni gruppo:

- l'esistenza di un elemento neutro (una *trasformazione identica*, che rende ogni figura equivalente a sé stessa);
- l'esistenza degli elementi simmetrici (se una trasformazione rende una prima figura equivalente ad una seconda figura, la *trasformazione inversa* renderà la seconda equivalente alla prima);
- l'esistenza di un'operazione (che consente di applicare di seguito due trasformazioni, ottenendo un'altra trasformazione del gruppo: se una trasformazione rende una prima figura equivalente ad una seconda figura, ed un'altra trasformazione rende una seconda figura equivalente ad una terza, la *composizione* delle due trasformazioni rende la prima figura equivalente alla terza).

Si noti che le tre proprietà appena elencate sono anche quelle individuano un sottogruppo all'interno di un gruppo assegnato (appartenenza dell'elemento neutro, degli elementi simmetrici, chiusura rispetto all'operazione del gruppo).

Quindi, la determinazione di *geometrie* e *simmetrie* è il modo più naturale di far emergere le nozioni di gruppo e sottogruppo.