Osservazioni (in margine all'Esercizio 2.27 d)

1. L'insieme $H = \{a + b\sqrt[3]{2} | a, b \in \mathbb{Q},\ (a, b) \neq (0, 0)\}$ non è chiuso rispetto al prodotto di numeri reali. Infatti, se fosse

$$\sqrt[3]{4} = a + b\sqrt[3]{2} \qquad \text{per qualche } a, b \in \mathbb{Q},$$

allora si avrebbe

$$2 = a\sqrt[3]{2} + b\sqrt[3]{4}$$

e dunque anche

$$2 = a\sqrt[3]{2} + b(a + b\sqrt[3]{2}) = ab + \left(a + b^2\right)\sqrt[3]{2},$$

da cui, essendo $\sqrt[3]{2}$ irrazionale,

$$ab = 2, \qquad a + b^2 = 0,$$

e infine

$$2 + b^3 = 0,$$

in contrasto con l'irrazionalità di $\sqrt[3]{2}$.

2. L'insieme $H = \{a + b\pi | a, b \in \mathbb{Q},\ (a, b) \neq (0, 0)\}$ non è chiuso rispetto al prodotto di numeri reali. Infatti, se fosse

$$\pi^2 = a + b\pi \qquad \text{per qualche } a, b \in \mathbb{Q},$$

allora π sarebbe radice del polinomio quadratico a coefficienti razionali

$$x^2 - bx - a,$$

ma ciò è impossibile, dato che π è un numero trascendente (Ferdinand von Lindemann, 1882).