Esercizio: Provare che un gruppo di ordine 5 è abeliano.

Svolgimento: Sia $G = \{x, y, z, w, e\}$ un gruppo di ordine 5, in cui e è l'elemento neutro. Denotiamo l'operazione con $*$. Supponiamo per assurdo che G non sia abeliano. Allora esistono in G due elementi che non commutano. Nessuno di questi può essere e. Dunque possiamo supporre che questi siano x, y. Si osservi che allora x, y non possono essere l'uno il simmetrico dell'altro, e dunque $x * y \neq e$. Per cancellabilità si avrà anche $x * y \neq x,\ x * y \neq y$. Quindi necessariamente $x * y \in \{w, z\}$. Possiamo supporre, senza ledere la generalità, che sia $x * y = z$. Dovendo essere $y * x$ distinto da questo, e, a sua volta, distinto da e, x, y, segue che $y * x = w$. Pertanto

$$x * w = x * (y * x) = (x * y) * x = z * x.$$

Ne consegue che nessuno tra w, z è il simmetrico di x (altrimenti, se, ad esempio, il simmmetrico di x fosse w, si avrebbe $x * w = w * x$, da cui $w * x = z * x$ e infine $w = z$). Poiché nemmeno y lo è (mentre che lo sia e è escluso a priori), si conclude, per esclusione, che debba esserlo x stesso. Ma ciò non è possibile, essendo l'ordine del gruppo dispari (proprietà dimostrata a parte). Oppure si può ragionare come segue: analogamente a sopra si prova anzitutto, per cancellabilità, che $z * x = y$. Essendo x simmetrico di sé stesso, si ha inoltre:

$$z = z * e = z * (x * x) = (z * x) * x = y * x = w,$$

assurdo.