Esercizio: Sia $(G, *)$ un gruppo. Sia $a \in G$. Si dice *centralizzante* di a in G l'insieme

$$C_G(a) = \{x \in G | a * x = x * a\}.$$

Provare che $C_G(a) < G$.

<u>Svolgimento:</u> Evidentemente l'elemento neutro e di G appartiene a $C_G(a)$, in quanto e commuta con ogni elemento del gruppo G. Siano ora $x, y \in C_G(a)$. Allora

$$(x * \overline{y}) * a = x * (\overline{y} * a) = x * (a * \overline{y}) = (x * a) * \overline{y} = (a * x) * \overline{y} = a * (x * \overline{y}),$$

ove la seconda uguaglianza si giustifica come segue. Per ipotesi si ha

$$a * y = y * a,$$

da cui, componendo entrambi i membri a sinistra con $\overline{y}$, si ottiene

$$\overline{y} * (a * y) = \overline{y} * (y * a),$$

e, per associatività,

$$(\overline{y} * a) * y = (\overline{y} * y) * a,$$

ossia

$$(\overline{y} * a) * y = a,$$

da cui, componendo entrambi i membri a destra con $\overline{y}$, con ovvi passaggi, si ricava infine

$$\overline{y} * a = a * \overline{y},$$

come volevasi. Si è dunque dimostrato che se un elemento di un gruppo commuta con un certo elemento dello stesso gruppo, allora ciò vale anche per il suo simmetrico.

La prima parte di questa dimostrazione prova l'asserto proposto sulla base della caratterizzazione dei sottogruppi: infatti si è provato che

- $C_G(a)$ è non vuoto;
- per ogni $x, y \in C_G(a)$, si ha che $x * \overline{y} \in C_G(a)$.

Esercizio: Sia $(G, *)$ un gruppo. Si dice *centro* di G l'insieme

$$Z(G) = \{g \in G | g * x = x * g \text{ per ogni } x \in G\}.$$

Provare che $Z(G) < G$.

<u>Svolgimento</u>: Alla luce dell'esercizio precedente basta osservare che

$$Z(G) = \bigcap_{a \in G} C_G(a)$$

e ricordare che l'intersezione di sottogruppi è un sottogruppo.

<u>Osservazione:</u> Il gruppo G è abeliano se e solo se $G = Z(G)$.