Potenze di un ciclo

Sia, nel gruppo simmetrico S_n, γ un ciclo di lunghezza ℓ. Allora, in base alla formula del periodo, per ogni $k \in \mathbb{Z}$,

$$o\left(\gamma^k\right) = \frac{o(\gamma)}{\mathrm{MCD}(o(\gamma), k)} = \frac{\ell}{\mathrm{MCD}(\ell, k)}.$$

Sia $d = \mathrm{MCD}(\ell, k)$.

- Se $d = 1$, allora $o\left(\gamma^k\right) = \ell$. In tal caso γ^k è un ℓ-ciclo avente lo stesso supporto di γ.
- Se $d > 1$, allora $t = \frac{\ell}{d}$ è un divisore proprio di ℓ. In tal caso γ^k è il prodotto di d cicli di lunghezza t. Se non è la permutazione identica (il che avviene se e solo se $d = \ell$ ossia se e solo se ℓ divide k), il suo supporto è uguale a quello di γ.

ESEMPIO

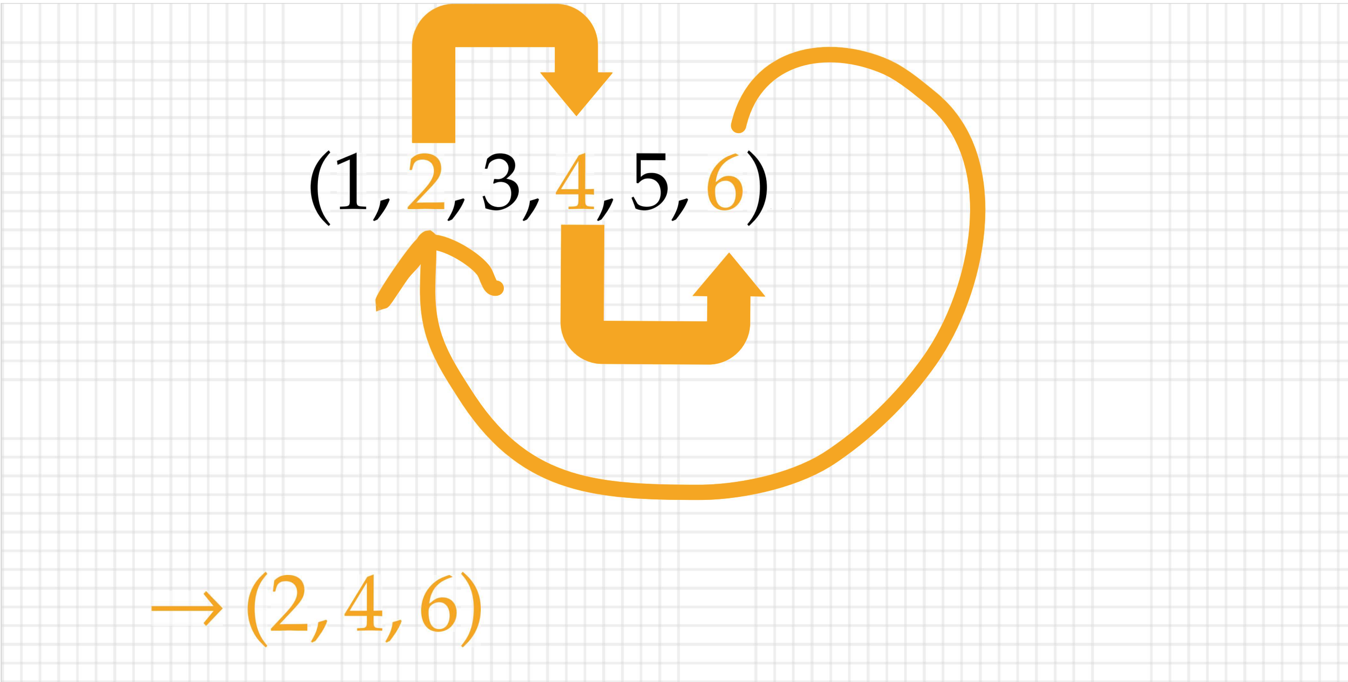
In S_6 consideriamo il 6-ciclo $\gamma = (1,2,3,4,5,6)$.

- Calcoliamo dapprima γ^2. Ci aspettiamo di ottenere il prodotto di 2 cicli di lunghezza 3. In effetti,
  - percorrendo l'orbita di 1, si ottiene:

$$(1,2,3,4,5,6)$$

$$\to (1,3,5)$$

  - percorrendo l'orbita di 2, si ottiene:



Pertanto

$$(1,2,3,4,5,6)^2 = (1,3,5)(2,4,6)$$

- Calcoliamo ora γ^5. Ecco il risultato ottenuto "saltando" di cinque in cinque nella sequenza $1,2,3,4,5,6$:

$$(1,2,3,4,5,6)^5 = (1,6,5,4,3,2)$$

(Si noti che si ottiene l'inverso di γ, in quanto $id = \gamma^6 = \gamma\gamma^5$).