Il gruppo $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$

Ha ordine 4, essendo i suoi elementi le seguenti coppie ordinate:

$([0]_2, [0]_2),\ ([0]_2, [1]_2),\ ([1]_2, [0]_2),\ ([1]_2, [1]_2)$.

Poiché in $\mathbb{Z}_2$ ogni elemento è simmetrico di sé stesso, lo stesso avviene in $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Quindi questo gruppo additivo è isomorfo al gruppo di Klein. Si propone dunque come "primo modello", da affiancare al gruppo additivo $\mathbb{Z}_4$, che rappresenta il "secondo modello".

Domanda: Quale altro gruppo additivo è isomorfo a $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$?

Risposta: Il gruppo additivo dell'anello $A = \mathbb{Z}_2[X] \,/\, \left(X^2 + X + \overline{1}\right)$ ha ordine 4 e in esso ogni elemento è simmetrico di sé stesso. Quindi è isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
Infatti: per ogni $\alpha \in \mathbb{Z}_2$, si ha che $\alpha + \alpha = \overline{0}$. Da ciò segue facilmente che, per ogni $a(X) \in \mathbb{Z}_2[X]$, si ha $a(X) + a(X) = \overline{0}$, e quindi, comunque fissato un polinomio non costante $f(X) \in \mathbb{Z}_2[X]$, nel gruppo additivo dell'anello $\mathbb{Z}_2[X] \,/\, (f(X))$, si avrà $[a(X)] + [a(X)] = [\overline{0}]$. In altri termini, in tale gruppo, ogni elemento è simmetrico di sé stesso.