Sottogruppi di un prodotto diretto

Siano $(G_1, *_1)$ e $(G_2, *_2)$ gruppi. Sia H_1 un sottogruppo di G_1 e sia H_2 un sottogruppo di G_2. Allora il prodotto diretto dei gruppi $(H_1, *_1|_{H_1})$ e $(H_2, *_2|_{H_2})$ è un sottogruppo di $G_1 \times G_2$. Basta osservare che

- ad $H_1 \times H_2$ appartiene l'elemento neutro (e_1, e_2), di $G_1 \times G_2$, poiché, essendo H_i sottogruppo di G_i, si ha che $e_i \in H_i$ (si ricordi che e_i denota l'elemento neutro di G_i);
- per ogni $(x_1, x_2) \in H_1 \times H_2$, il simmetrico $\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}\right)$ di (x_1, x_2) in $G_1 \times G_2$ appartiene ad $H_1 \times H_2$, poiché, essendo H_i sottogruppo di G_i, $\overline{x_i} \in H_i$ (si ricordi che $\overline{x_i}$ denota il simmetrico di x_i in G_i).

Tuttavia, non sempre i sottogruppi di $G_1 \times G_2$ sono del tipo suindicato. Ad esempio, in $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, non lo è il sottogruppo $H = \{([0]_2, [0]_2), ([1]_2, [1]_2)\}$. Questo è un sottogruppo, in quanto finito e chiuso rispetto alla somma del gruppo. Non è però un prodotto diretto di sottogruppi H_1 e H_2 dei due fattori diretti, in quanto, se lo fosse, ad entrambi H_1 e H_2 dovrebbero appartenere gli elementi $[0]_2$ e $[1]_2$, e quindi entrambi coinciderebbero con $\mathbb{Z}_2$, dando così origine, se composti con il prodotto diretto, al sottogruppo totale di $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.