Da *La Géométrie* di René Descartes (1637)

Nel Libro I dell'opera l'autore illustra il suo approccio algebrico ai problemi costruttivi della geometria euclidea. Questi, così ci spiega, possono essere tradotti in sistemi di equazioni, in cui le incognite sono le lunghezze di linee da determinare, mentre i numeri noti (coefficienti) sono lunghezze di linee assegnate. Tutti i tipi di grandezze danno luogo ad espressioni formate tramite le quattro operazioni aritmetiche: sono le stesse su cui si basa il procedimento risolutivo, nel quale ad esse si aggiunge, eventualmente, l'estrazione di radici. Le espressioni che compaiono a sinistra e a destra del segno uguale (scritto da Cartesio come $\propto$) emergono da considerazioni geometriche come due diverse rappresentazioni della stessa quantità. Queste si ottengono tramite un metodo *analitico*, che parte dalla situazione finale (in cui il problema si immagina già risolto, con linee note ed ignote opportunamente combinate secondo le relazioni previste), per individuarne le singole parti costituenti, insieme all'ordine logico in cui si pensa di inserirle, una dopo l'altra, nella struttura complessiva.

Ainsi, voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis, sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusques à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons, ce qui se nomme une équation; car les termes de l'une de ces deux façons sont égaux à ceux de l'autre. Et on doit trouver autant de telles équations qu'on a supposé de lignes qui étoient inconnues.

In tal modo, volendo risolvere qualche problema, lo si deve dapprima considerare come già fatto, e bisogna dare dei nomi a tutte le linee che sembrano necessarie per costruirlo, sia a quelle che sono ignote sia alle altre. Poi, senza considerare alcuna differenza tra queste linee note e ignote, si deve percorrere la difficoltà secondo l'ordine che mostra nel modo più naturale possibile in quale maniera esse dipendano reciprocamente le une dalle altre, fino a che non si sarà trovato un mezzo per esprimere una stessa quantità in due forme, il che si chiama ***equazione****; infatti i termini di una delle due forme sono uguali a quelli dell'altra. E si devono trovare tante equazioni siffatte quante sono le linee che si sono supposte ignote.*

Le equazioni provenienti dalla descrizione di luoghi geometrici, ossia curve del piano, sono studiate da Cartesio nei primi due libri, e sono quasi tutte di secondo grado. Alla risoluzione delle equazioni di grado qualsiasi è dedicato il Libro III, in cui leggiamo:

Sachez donc qu'en chaque équation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut-il y avoir de diverses racines, c'est-à-dire de valeurs de cette quantité; car, par exemple, si on suppose x égale à 2, ou bien $x - 2$ égal à rien; et derechef $x = 3$, ou bien $x - 3 = 0$; en multipliant ces deux équations

$$x - 2 = 0, \quad \text{et} \quad x - 3 = 0,$$

l'une par l'autre, on aura

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

ou bien

$$x^2 = 5x - 6,$$

qui est une équation en laquelle la quantité x vaut 2 et tout ensemble vaut 3. Que si derechef on fait

$$x - 4 = 0,$$

et qu'on multiplie cette somme par

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

on aura

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0,$$

qui est une autre équation en laquelle x, ayant trois dimensions, a aussi trois valeurs, qui sont 2, 3 et 4.

Mais souvent il arrive que quelques unes de ces racines sont fausses ou moindres que rien; comme si on suppose que x désigne aussi le défaut d'une quantité qui soit 5, on a

$$x + 5 = 0,$$

qui, étant multiplié par

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0,$$

fait

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

pour une équation en laquelle il y a quatre racines, à savoir trois vraies qui sont 2, 3, 4, et une fausse qui est 5.

Et réciproquement que si la somme d'une équation ne peut être divisée par un binôme composé de la quantité inconnue + ou — quelque autre quantité, cela témoigne que cette autre quantité n'est la valeur d'aucune de ses racines. Comme cette dernière

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

peut bien être divisée par $x - 2$, et par $x - 3$, et par $x - 4$, et par $x - 5$, mais non point par x + ou — aucune autre quantité; ce qui montre qu'elle ne peut avoir que les quatre racines 2, 3, 4 et 5.

Sappiate dunque che in ogni equazione, tante quante sono le dimensioni della quantità incognita, tante possono essere le diverse radici, cioè i valori di questa quantità; infatti, per esempio, se si suppone x uguale a 2*, ovvero* $x - 2$ *uguale a niente, e ancora x uguale a* 3*, ovvero* $x - 3$ *uguale a niente; moltiplicando queste due equazioni*

$$x-2=0, \text{ e } x-3=0,$$

l'una per l'altra, si avrà

$$x^2-5x+6=0,$$

ovvero

$$x^2=5x-6,$$

che è un'equazione nella quale la quantità x vale 2 *e tutto insieme* (allo stesso tempo? Inoltre?) *vale* 3. *Se, nuovamente, si fa*

$$x-4=0,$$

e si moltiplica questa somma per

$$x^2-5x+6=0,$$

si avrà

$$x^3-9x^2+26x-24=0,$$

che è un'altra equazione nella quale x, avendo tre dimensioni, ha anche tre valori, che sono 2,3 *e* 4.

*Ma spesso accade che alcune delle radici siano **false** o meno di niente; perché se si suppone che x denoti il difetto di una quantità che sia* 5, *si ha*

$$x+5=0,$$

che, una volta moltiplicato per

$$x^3-9x^2+26x-24=0,$$

fa

$$x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$$

per un'equazione nella quale ci sono quattro radici, ovverosia tre vere che sono 2, 3 *e* 4 *e una falsa che è* 5.

E viceversa, se la somma di un'equazione non può essere divisa per un binomio composto dalla quantità ignota + o – qualche altra quantità, ciò testimonia che questa altra quantità non è il valore di alcuna delle sue radici. Perché quest'ultima

$$x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$$

può ben essere divisa per $x-2$ *e per* $x-3$ *e per* $x-4$ *e per* $x-5$, *ma certamente non per x + o – nessun'altra quantità; il che dimostra che essa può avere solo le radici* 2, 3, 4 *e* 5.

Ritroviamo qui i noti risultati oggi associati al nome di Paolo Ruffini.
Segue l'enunciazione della famosa *regola di Cartesio* per la determinazione del numero delle radici positive e negative di un'equazione. Viene quindi spiegato come modificare un'equazione in modo

che le nuove radici siano ottenute dalle precedenti sommando un certo numero, oppure moltiplicandole o dividendole per un certo numero. Più avanti Cartesio osserva:

Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires, c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celles qu'on imagine; comme encore qu'on en puisse imaginer trois en celle-ci,

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0,$$

il n'y en a toutefois qu'une réelle qui est 2, et pour les deux autres, quoiqu'on les augmente ou diminue, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer, on ne sauroit les rendre autres qu'imaginaires.

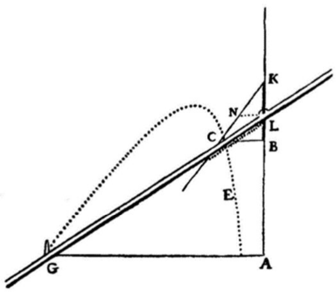
Per il resto, tanto le radici vere quanto le false non sono sempre ***reali****, ma qualche volta soltanto* ***immaginarie****, ossia si può sempre immaginarne tante quante ho detto in ogni equazione, ma talvolta non esiste alcuna quantità che corrisponda a quelle che si immaginano; infatti, benché se ne possano immaginare tre in questa,*

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0,$$

tuttavia ve n'è una sola reale, che è 2, e, quanto alle altre due, per quanto le si aumenti o diminuisca, o le si moltiplichi nel modo che ho appena spiegato, non si potrà renderle altro che immaginarie.

Il problema delle radici "immaginarie" sarà definitivamente risolto da Carl Friedrich Gauss, nel 1799, con la dimostrazione di quello che è passato alla storia come *Teorema Fondamentale dell'Algebra.*

LIVRE SECOND. 321



Aprés cela prenant vn point a diſcretion dans la courbe, comme C, ſur lequel ie ſuppoſe que l'inſtrument qui ſert a la deſcrire eſt appliqué, ie tire de ce point C la ligne C B parallele a G A, & pourceque C B & B A ſont deux quantités indeterminées & inconnuës, ie les nomme l'vne y & l'autre x. mais affin de trouuer le rapport de l'vne à l'autre; ie conſidere auſſy les quantités connuës qui determinent la deſcription de cete ligne courbe, comme G A que ie nomme a, K L que ie nomme b, & N L parallele a G A que ie nomme c. puis ie dis, comme N L eſt à L K, ou c à b, ainſi C B, ou y, eſt à B K, qui eſt par conſequent $\frac{b}{c}y$: & B L eſt $\frac{b}{c}y - b$, & A L eſt $x + \frac{b}{c}y - b$. de plus comme C B eſt à L B, ou y à $\frac{b}{c}y - b$, ainſi a, ou G A, eſt á L A, ou $x + \frac{b}{c}y - b$. de façon que mul-

S f tipliant

53

322 LA GEOMETRIE.

tipliant la ſeconde par la troiſieſme on produit $\frac{ab}{c}y - ab$, qui eſt eſgale à $xy + \frac{b}{c}yy - by$ qui ſe produit en multipliant la premiere par la derniere. & ainſi l'equation qu'il falloit trouuer eſt.

$$yy \propto cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac.$$

de laquelle on connoiſt que la ligne E C eſt du premier genre, comme en effect elle n'eſt autre qu'vne Hyperbole.

Que ſi en l'inſtrument qui ſert a la deſcrire on fait qu'au lieu de la ligne droite C N K, ce ſoit cete Hyperbole, ou quelque autre ligne courbe du premier genre, qui termine le plan C N K L; l'interſection de cete ligne & de la reigle G L deſcrira, au lieu de l'Hyperbole E C, vne autre ligne courbe, qui ſera du ſecond genre. Comme ſi C N K eſt vn cercle, dont L ſoit le centre, on deſcrira la premiere Conchoide des anciens; & ſi c'eſt vne Parabole dont le diametre ſoit K B, on deſcrira la ligne courbe, que i'ay tantoſt dit eſtre la premiere, & la plus ſimple pour la queſtion de Pappus, lorſqu'il n'y a que cinq lignes droites données par poſition. Mais ſi au lieu d'vne de ces lignes courbes du premier genre, c'en eſt vne du ſecond, qui termine le plan C N K L, on en deſcrira par ſon moyen vne du troiſieſme, ou ſi c'en eſt vne du troiſieſme, on en deſcrira vne du quatrieſme, & ainſi a l'infini. comme il eſt fort ayſé a connoiſtre par le calcul. Et en quelque autre façon, qu'on imagine la deſcription d'vne ligne courbe, pourvûqu'elle ſoit du nombre de celles que ie nomme Geometriques, on pourra touſiours trou-

uer

54