

A proposito della forma esponenziale dei numeri complessi

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

ed anche

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Si definisce quindi, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$$

E ne consegue che

$$\begin{aligned}e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos x + i \sin x\end{aligned}$$