

A proposito della forma esponenziale dei numeri complessi

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ed anche

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Si definisce quindi, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$$

E ne consegue che

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$= \cos x + i \sin x$$