Il campo complesso non è un campo ordinato

Ricordiamo che un campo F si dice *ordinato* se è dotato di un ordine totale $\leq$ tale che

1) per ogni $a, b, c \in F$, se $a < b$, allora $a + c < b + c$;
2) per ogni $a, b \in F$, se $a > 0$ e $b > 0$, allora $ab > 0$.

Da questa definizione segue, in particolare, che se $a \in F$ è tale che $a > 0$, allora $a - a > -a$, ossia $0 > -a$.

Se per assurdo $\mathbb{C}$ possedesse un ordine siffatto, allora, poiché $i \neq 0$, si avrebbe $i > 0$ oppure $i < 0$, e in questo secondo caso sarebbe $-i > 0$. Ma allora, essendo $-1 = i^2 = (-i)^2$, per la proprietà 2) sarebbe $-1 > 0$, e pertanto, per la stessa proprietà, $1 = (-1)^2 > 0$. Ma da ciò seguirebbe $-1 < 0$, il che costituisce una contraddizione.