Lezione 7

Prerequisiti: Gruppi simmetrici.

Polinomi simmetrici.

Sia K un campo. Consideriamo l'anello dei polinomi $K[x_1,...,x_n]$. Per ogni $p(x_1,..,x_n)\in K[x_1,...,x_n]$ e per ogni $\sigma\in S_n$ porremo

$$\sigma p(x_1,...,x_n)=p(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(n)}).$$

Definizione 7.1 Un polinomio $p(x_1,..,x_n)\in K[x_1,...,x_n]$ si dice *simmetrico* se $\sigma p(x_1,...,x_n)=p(x_1,...,x_n)$ per ogni $\sigma\in S_n$.

In altri termini, un polinomio in n variabili è simmetrico se ogni permutazione di tali n variabili lo lascia inalterato. Si dice anche che esso è *invariante rispetto a* S_n.

Esempi 7.2
a) Ogni polinomio costante è simmetrico.
b) Sono simmetrici i seguenti polinomi di $K[x_1,x_2,x_3]$:

$$1,\quad x_1+x_2+x_3,\quad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3,\quad x_1x_2x_3.$$

Definizione 7.3 Sia n un intero positivo. Si dicono *polinomi simmetrici elementari* (*in n variabili*) i seguenti polinomi di $K[x_1,...,x_n]$:

$$x_1+x_2+\cdots+x_n,\quad x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,\quad ...\quad ,\ x_1x_2\cdots x_n.$$

Nota Il generico polinomio simmetrico elementare in n variabili è

$$s_k^{(n)}=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} x_{i_1}\cdots x_{i_k}\qquad (1\le k\le n),$$

Esistono dunque, esattamente n polinomi simmetrici elementari in n variabili, di gradi 1, ... , n.

È immediato verificare la seguente

Proposizione 7.4 La somma ed il prodotto di polinomi simmetrici in n variabili sono polinomi simmetrici in n variabili. In particolare, i polinomi simmetrici a coefficienti in K formano un sottoanello di $K[x_1,...,x_n]$.

Secondo questa proposizione, è dunque possibile costruire infiniti polinomi simmetrici in n variabili a partire dai polinomi costanti e dai polinomi simmetrici elementari. Ad esempio, per $n = 3$:

$$(x_1+x_2+x_3)^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)(x_1x_2x_3)$$

Si dimostra che, in realtà, ogni polinomio simmetrico si può ottenere in questo modo.

Teorema 7.5 Per ogni polinomio simmetrico $p(x_1,...,x_n) \in K[x_1,...,x_n]$ in n variabili esiste un unico polinomio $f(x_1,...,x_n) \in K[x_1,...,x_n]$ tale che

$$p(x_1,...,x_n) = f(s_1^{(n)},...,s_n^{(n)}).$$

In altri termini, l'anello dei polinomi simmetrici in n variabili è $K[s_1^{(n)},...,s_n^{(n)}]$.

Dimostrazione: Naturalmente la tesi è banale se $p(x_1,...,x_n)$ è costante. Nei restanti casi, per dimostrare l'esistenza, procediamo per doppia induzione su $n \geq 1$ e sul grado d di $p(x_1,...,x_n)$. Per $n = 1$ non v'è nulla da provare, essendo in tal caso $p(x_1) = \sum_{i=0}^{d} a_i s_1^{(1)i}$ per opportuni $a_i \in K$. Sia ora $n > 1$, e supponiamo la tesi vera per $n - 1$ variabili. Per $d = 1$, necessariamente $p(x_1,...,x_n) = as_1^{(n)} + b$ per opportuni $a, b \in K$. Sia allora $d > 1$ e supponiamo la tesi vera per i polinomi simmetrici in n variabili di grado inferiore. Introduciamo la seguente notazione: per ogni $q(x_1,...,x_n) \in K[x_1,...,x_n]$ poniamo

$$\overset{\circ}{q}(x_1,...,x_{n-1}) = q(x_1,...,x_{n-1},0).$$

Notiamo che se $q(x_1,...,x_n)$ è un polinomio simmetrico in n variabili, allora $\overset{\circ}{q}(x_1,...,x_{n-1})$ è un polinomio simmetrico in $n - 1$ variabili. In particolare, a $\overset{\circ}{p}(x_1,...,x_{n-1})$ si applica l'ipotesi induttiva, dunque esiste un polinomio $g(x_1,...,x_{n-1}) \in K[x_1,...,x_{n-1}]$ tale che

$$\overset{\circ}{p}(x_1,...,x_{n-1}) = g(s_1^{(n-1)},...,s_{n-1}^{(n-1)}) \tag{1}$$

Ma, com'è facile vedere, per ogni $k = 1,...,n-1$, si ha

$$s_k^{(n-1)} = \overset{\circ}{s}{}_k^{(n)} .$$

Sia ora

$$p_1(x_1,...,x_n) = p(x_1,...,x_n) - g(s_1^{(n)},...,s_{n-1}^{(n)}). \tag{2}$$

Allora, in virtù della (1), $\overset{\circ}{p}_1(x_1,...,x_{n-1}) = 0$. Quindi $p_1(x_1,...,x_n)$ è divisibile per x_n. D'altra parte $p_1(x_1,...,x_n)$ è un polinomio simmetrico, in quanto differenza di polinomi simmetrici. Pertanto, per simmetria, $p_1(x_1,...,x_n)$ è divisibile per x_i, per ogni $i = 1,..., n$; esso è dunque divisibile per $s_n^{(n)}$.
Il polinomio

$$p_2(x_1,...,x_n) = \frac{p_1(x_1,...,x_n)}{s_n^{(n)}} \tag{3}$$

è allora simmetrico in n variabili. Essendo il suo grado minore di d, per l'ipotesi induttiva, si ha

$$p_2(x_1,...,x_n) = h(s_1^{(n)},...,s_n^{(n)}) \tag{4}$$

per un opportuno $h(x_1,...,x_n) \in K[x_1,...,x_n]$. Da (2), (3) e (4) segue

$$p(x_1,...,x_n) = s_n^{(n)} h(s_1^{(n)},...,s_n^{(n)}) + g(s_1^{(n)},...,s_{n-1}^{(n)}),$$

che è la rappresentazione cercata.
Per provare l'unicità, occorre dimostrare che, dato $f(x_1,...,x_n) \in K[x_1,...,x_n]$, si ha

$$f(s_1^{(n)},...,s_n^{(n)}) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad f(x_1,...,x_n) = 0.$$

La dimostrazione può essere svolta con un ragionamento induttivo simile a quello effettuato nella prima parte. La lasciamo al lettore. □

Esercizio 7.6 Scrivere il polinomio simmetrico $p(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ come espressione polinomiale nei polinomi simmetrici elementari in 3 variabili.

Svolgimento: Si consideri

$$p(x_1,x_2,x_3) - s_1^{(3)^2} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (x_1 + x_2 + x_3)^2 = -2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = -2s_2^{(3)}.$$

Si ha allora,

$$p(x_1,x_2,x_3) = s_1^{(3)^2} - 2s_2^{(3)},$$

che è la rappresentazione cercata.

Osservazione 7.7 Accanto ai polinomi $s_1^{(n)},...,s_n^{(n)}$ si possono considerare i n seguenti polinomi, anch'essi simmetrici in n variabili:

$$t_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \qquad (1 \le k \le n).$$

Si può dimostrare che i polinomi simmetrici elementari sono rappresentabili come espressioni polinomiali in $t_1^{(n)},...,t_n^{(n)}$. Ad esempio, si ha, per $n = 3$,

$t_1^{(3)} = x_1 + x_2 + x_3$

$t_2^{(3)} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$t_3^{(3)} = x_1{}^3 + x_2{}^3 + x_3{}^3$

ove

$$s_1^{(3)} = t_1^{(3)}, \qquad s_2^{(3)} = \frac{1}{2}(t_1^{(3)^2} - t_2^{(3)}), \qquad s_3^{(3)} = \frac{1}{6}(t_1^{(3)^3} - 3t_2^{(3)}t_1^{(3)} + 2t_3^{(3)})$$

Dal Teorema 7.5 segue allora che ogni polinomio simmetrico in n variabili è un'espressione polinomiale in $t_1^{(n)},...,t_n^{(n)}$. Questi ultimi possono quindi essere assunti come una sorta di polinomi simmetrici elementari "alternativi".

Osservazione 7.8 Combinare i polinomi simmetrici elementari non è l'unico metodo per costruire polinomi simmetrici. In effetti, si può ricavare un polinomio simmetrico da un qualunque polinomio "simmetrizzando" quest'ultimo. Si tratta di sommare al polinomio di partenza $p(x_1,...,x_n)$ tutti i polinomi ottenuti da questo permutando le variabili in tutti i modi possibili. Si determina così il polinomio

$${}^{\Sigma}p = \sum_{\sigma \in S_n} \sigma p\,.$$

Ad esempio, per n = 3, se $p(x_1, x_2, x_3) = x_1$, allora ${}^{\Sigma}p(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1 + x_2 + x_3)$. Anziché effettuare la somma, si può effettuare il prodotto:

$${}^{\Pi}p = \prod_{\sigma \in S_n} \sigma p$$

Nel nostro esempio, il risultato è allora ${}^{\Pi}p(x_1, x_2, x_3) = x_1{}^2 x_2{}^2 x_3{}^2$.

Questa osservazione ci sarà utile nella dimostrazione della prossima proposizione, che estende il Teorema 7.5 dai polinomi ai quozienti di polinomi (funzioni razionali), ovvero agli elementi di $K(x_1,...,x_n)$, che è il campo delle frazioni di $K[x_1,...,x_n]$ (vedi Algebra 2, Lezione 25). È chiaro il significato del termine "simmetrico" riferito a tali funzioni.

Esempio 7.9 Si ottengono ancora polinomi simmetrici se da ${}^{\Sigma}p$ e ${}^{\Pi}p$ si omettono gli eventuali termini ripetuti. Indicheremo con ${}^{\Sigma}p'$ e ${}^{\Pi}p'$ i polinomi ridotti. Ad esempio, se n = 3, dato $p(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - x_3$, si ha

$${}^{\Sigma}p' = (x_1 + x_2 - x_3) + (x_1 - x_2 + x_3) + (-x_1 + x_2 + x_3) = x_1 + x_2 + x_3\,,$$

e

$${}^{\Pi}p' = (x_1 + x_2 - x_3)(x_1 - x_2 + x_3)(-x_1 + x_2 + x_3)\,.$$

Si noti che i termini, in entrambi i casi, si riducono da 6 a 3: ogni permutazione $\sigma \in S_3$ produce infatti lo stesso termine che la permutazione $\sigma(12)$. Infatti p è simmetrico rispetto allo scambio tra 1 e 2.

Proposizione 7.10 Per ogni funzione razionale simmetrica $\theta(x_1,...,x_n) \in K(x_1,...,x_n)$ in n variabili esiste un'unica funzione razionale $\tau(x_1,...,x_n) \in K(x_1,...,x_n)$ tale che

$$\theta(x_1,...,x_n) = \tau(s_1^{(n)},...,s_n^{(n)}) .$$

In altri termini, l'insieme delle funzioni razionali simmetriche in n variabili è $K(s_1^{(n)},...,s_n^{(n)})$.

<u>Dimostrazione:</u> Sia $\theta(x_1,...,x_n) = \dfrac{f(x_1,...,x_n)}{g(x_1,...,x_n)}$, con $f(x_1,...,x_n), g(x_1,...,x_n) \in K[x_1,...,x_n]$, e $g(x_1,...,x_n) \neq 0$. Allora

$${}^{\Pi}g(x_1,...,x_n) \qquad \text{e} \qquad {}^{\Pi}g(x_1,...,x_n)\theta(x_1,...,x_n) = f(x_1,...,x_n)\prod_{\sigma \neq \mathrm{id}} \sigma g(x_1,...,x_n)$$

sono polinomi simmetrici in n variabili. Dal Teorema 7.5 segue che sono entrambi espressioni polinomiali in $s_1^{(n)},...,s_n^{(n)}$, diciamo, rispettivamente,

$$u(s_1^{(n)},...,s_n^{(n)}) \qquad \text{e} \qquad v(s_1^{(n)},...,s_n^{(n)})$$

con $u(x_1,...,x_n), v(x_1,...,x_n) \in K[x_1,...,x_n]$. Allora $\tau(x_1,...,x_n) = \dfrac{v(x_1,...,x_n)}{u(x_1,...,x_n)}$ è la funzione razionale che dà la rappresentazione cercata. L'unicità segue immediatamente dal Teorema 7.5. $\square$

Il prossimo enunciato, di cui omettiamo la facile dimostrazione, mostra la centralità dei polinomi simmetrici nello studio delle equazioni algebriche.

Proposizione 7.11 (*Formule di Viète*) Sia

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i , \qquad (a_i \in K, a_n = 1)$$

e siano $\alpha_1,...,\alpha_n$ le sue radici in un suo campo di spezzamento, contate con le rispettive molteplicità. Allora, per ogni $i = 0,...,n-1$,

$$a_i = (-1)^{n-i} s_{n-i}^{(n)}(\alpha_1,...,\alpha_n)$$

Dal Teorema 7.5 e dalle Proposizioni 7.10 e 7.11 segue subito:

Corollario 7.12 Ogni funzione polinomiale simmetrica valutata nelle radici di un polinomio (monico) è rappresentabile come funzione polinomiale dei coefficienti di quest'ultimo. Vale l'analogo enunciato per le funzioni razionali.