Lezione 18

Prerequisiti: Anelli e moduli.

Anelli e moduli noetheriani.

Sia A un anello commutativo unitario.

Definizione 18.1 Un A-modulo M si dice *noetheriano* se vale una delle seguenti proprietà equivalenti.

a) Ogni catena ascendente di sottomoduli di M è stazionaria, cioè per ogni successione di sottomoduli di M

$$N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_i \subset \cdots$$

esiste un indice i_0 tale che $N_{i_0} = N_i$ per ogni indice $i \geq i_0$.

b) Ogni insieme non vuoto di sottomoduli di M ha un elemento massimale (per inclusione).

c) Ogni sottomodulo di M è finitamente generato.

L'anello A si dice noetheriano se è tale come modulo su se stesso (ossia: valgono a), b), c) con "ideale" al posto di "sottomodulo".)

Una conseguenza di b) è

Proposizione 18.2 In un anello noetheriano, ogni ideale proprio è contenuto in un ideale massimale.

****Nota** In virtù del Lemma di Zorn, la proposizione vale, in realtà, in ogni anello commutativo unitario (vedi [AM], Theorem 1.3).

Esempio 18.3 Come conseguenza della condizione c) della Definizione 18.1,

a) ogni dominio ad ideali principali è un anello noetheriano,

b) ogni spazio vettoriale su un campo è un modulo noetheriano se e solo se ha dimensione finita,

c) un modulo finito è sempre noetheriano.

Inoltre vale il seguente

****Teorema 18.4** (*Teorema della base di Hilbert*) Se A è un anello noetheriano, allora anche $A[x]$ è un anello noetheriano.

Dimostrazione: [AM], Theorem 7.5.

Esempio 18.5 In virtù del Teorema 18.4, e in base a quanto osservato nell'Esempio 18.3 a), sono anelli noetheriani $\mathbf{Z}[x]$, $K[x]$, dove K è un campo e, più in generale, ogni anello $A[x]$, ove A è un dominio a ideali principali.

Dal Teorema 18.4 si deduce, con un facile ragionamento induttivo:

Corollario 18.6 Se A è un anello noetheriano, allora anche $A[x_1, \ldots, x_n]$ è un anello noetheriano.

Esempio 18.7 Un anello di polinomi in un insieme infinito di indeterminate non è mai noetheriano. Infatti, detto A l'anello dei coefficienti, se $\{x_i | i \in \mathbf{N}\}$ è un sottoinsieme di indeterminate, allora la successione crescente di ideali

$$(x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \cdots \subset (x_1, x_2, ..., x_n) \subset \cdots$$

non è stazionaria (è strettamente crescente). Viene quindi negata la condizione a) della Definizione 18.1.

Dalla stessa condizione a) della Definizione 18.1 si deduce subito

Proposizione 18.8 Ogni sottomodulo ed ogni quoziente di un A-modulo noetheriano è noetheriano.

Si verifica anche facilmente che

Proposizione 18.9 Ogni somma diretta di un numero finito di A-moduli noetheriani è un A-modulo noetheriano.

Osservazione 18.10 Tale proprietà non si estende alle somme dirette di infiniti A-moduli noetheriani. Se $M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} M_i$, con $M_i \neq 0$ per ogni indice i, allora la successione crescente di sottomoduli di M

$$M_1 \subset M_1 \oplus M_2 \subset \cdots \subset M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n \subset \cdots$$

non è stazionaria.

Vale, infine, la seguente caratterizzazione:

Proposizione 18.11 Un modulo su un anello noetheriano è noetheriano se e solo se è finitamente generato.

Dimostrazione: Un modulo noetheriano è finitamente generato come conseguenza della condizione c) della Definizione 18.1. Viceversa, supponiamo che M sia un modulo finitamente generato su un anello noetheriano A. Allora, in virtù della Proposizione 17.24, M è isomorfo, per qualche intero positivo n, ad un quoziente di A^n. Quest'ultimo è noetheriano in virtù della Proposizione 18.9, quindi lo è M per la Proposizione 18.8. □