Lezione 14

Prerequisiti: Lezioni 8, 13.

Risoluzione delle equazioni algebriche.

Sia F un campo, e sia K una chiusura algebrica di F. Sia $f(x) \in F[x]$ non costante. Studiamo i metodi di risoluzione per l'equazione $f(x) = 0$, quando il grado di $f(x)$ è basso. Sia $\Delta = \Delta(f)$.

Equazioni quadratiche

Supponiamo che F abbia caratteristica diversa da 2. Sia $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in F, a \neq 0$. Allora, detta $\sqrt{\Delta}$ una radice quadrata di $\Delta = b^2 - 4ac$, le radici di $f(x)$ in K sono

$$\alpha_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \alpha_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Segue che:
- $f(x)$ ha due radici distinte in F, se $\Delta \neq 0$ e Δ ha una radice quadrata in F;
- $f(x)$ ha una radice doppia in F, se $\Delta = 0$;
- $f(x)$ ha due radici distinte in $K \setminus F$, se Δ non ha radici quadrate in F.

Osservazione 14.1 Le formule risolutive riportate sopra non si applicano al caso di caratteristica 2, in cui l'elemento 2 non è invertibile.

Per semplicità, nel seguito, per ogni $\alpha \in F$, con il simbolo $\sqrt{\alpha}$ indicheremo una radice quadrata di α in K.

Equazioni cubiche

Sia $f(x) = x^3 + px + q$, con $p, q \in F$. Illustriamo il metodo sviluppato da Nicolò Tartaglia (1499-1557) e Girolamo Cardano (1501-1576) nel Cinquecento per ricavare una formula risolutiva generale che esprime le radici di $f(x)$ (naturalmente, il metodo di Cardano si riferiva a polinomi a coefficienti reali). Noi supporremo che la caratteristica di F sia diversa da 2 e da 3. Effettuiamo, anzitutto, una sostituzione formale ponendo $x = u + v$. Si ha

$$f(u+v) = (u+v)^3 + p(u+v) + q = u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q.$$

A questo punto, possiamo trovare le radici di $f(x)$ imponendo

$$3uv + p = 0 \qquad u^3 + v^3 + q = 0. \tag{1}$$

Dalla prima equazione ricaviamo $v=-\frac{p}{3u}$ che, sostituito nella seconda equazione, ci fornisce

$$27u^6+27qu^3-p^3=0.$$

Abbiamo ottenuto un'equazione quadratica in u^3. Ponendo $y=u^3$, l'equazione diventa

$$27y^2+27qy-p^3=0,$$

che equivale a

$$y^2+qy-\frac{p^3}{27}=0, \qquad (2)$$

le cui soluzioni sono

$$\beta_1=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}, \qquad \beta_2=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.$$

Si osservi che, in base all'Esempio 8.10 b), i radicandi sono uguali a $\frac{-\Delta}{4\cdot 27}$. Inoltre $\beta_1\beta_2=-\frac{p^3}{27}$. Quindi le soluzioni cercate per u sono le radici cubiche di β_1,β_2 in *K*. Indicate con $\sqrt[3]{\beta_1},\sqrt[3]{\beta_2}$ radici cubiche di β_1,β_2 in *K*, e con ω una radice primitiva cubica di 1 in *K*, i valori risultanti per *u* sono

$$\begin{array}{lll}\sqrt[3]{\beta_1}, & \omega\sqrt[3]{\beta_1}, & \omega^2\sqrt[3]{\beta_1},\\ \sqrt[3]{\beta_2}, & \omega\sqrt[3]{\beta_2}, & \omega^2\sqrt[3]{\beta_2}.\end{array}$$

Si osservi che risolvere le (1) rispetto a *u* oppure a *v* fornisce la stessa equazione (2). Per motivi di simmetria possiamo quindi attribuire i primi tre valori ad *u* ed i secondi tre valori a *v*. Teniamo ora conto della prima delle (1): supponiamo di aver scelto le radici cubiche in modo che $\sqrt[3]{\beta_1}\sqrt[3]{\beta_2}=-\frac{p}{3}$. Allora le coppie di valori di *u* e *v* che verificano la stessa uguaglianza sono

$$(u,v)\in\left\{(\sqrt[3]{\beta_1},\sqrt[3]{\beta_2}),(\omega\sqrt[3]{\beta_1},\omega^2\sqrt[3]{\beta_2}),(\omega^2\sqrt[3]{\beta_1},\omega\sqrt[3]{\beta_2})\right\}.$$

Quindi le radici di $f(x)$ sono (*formule di Tartaglia-Cardano*):

$$\alpha_1=\sqrt[3]{\beta_1}+\sqrt[3]{\beta_2}, \quad \alpha_2=\omega\sqrt[3]{\beta_1}+\omega^2\sqrt[3]{\beta_2}, \quad \alpha_3=\omega^2\sqrt[3]{\beta_1}+\omega\sqrt[3]{\beta_2}$$

Esempio 14.2 Nell'Esempio 13.8 avevamo considerato il polinomio $f(x)=x^3-3x+1\in\mathbf{Q}[x]$, il cui gruppo di Galois su **Q** è isomorfo ad A_3. Utilizziamo le formule appena trovate per determinare le sue radici in **C**. Risolviamo prima l'equazione quadratica ausiliaria

$$y^2+y+1=0 \qquad (3)$$

Si ha

$$\beta_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \beta_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

che riconosciamo come le radici cubiche primitive dell'unità

$$\omega = \beta_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad \omega^2 = \beta_2 = e^{\frac{4\pi i}{3}},$$

che sono radici complesse coniugate.
Quindi porremo

$$\sqrt[3]{\beta}_1 = e^{\frac{2\pi i}{9}}, \quad \sqrt[3]{\beta_2} = e^{\frac{16\pi i}{9}},$$

che sono ancora complesse coniugate, così come lo sono

$$\omega\sqrt[3]{\beta}_1 = \beta_1\sqrt[3]{\beta}_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}+\frac{2\pi i}{9}} = e^{\frac{8\pi i}{9}}, \quad \omega^2\sqrt[3]{\beta}_2 = \beta_2\sqrt[3]{\beta}_2 = e^{\frac{4\pi i}{3}+\frac{16\pi i}{9}} = e^{\frac{10\pi i}{9}}$$

e

$$\omega^2\sqrt[3]{\beta}_1 = \beta_2\sqrt[3]{\beta}_1 = e^{\frac{4\pi i}{3}+\frac{2\pi i}{9}} = e^{\frac{14\pi i}{9}}, \quad \omega\sqrt[3]{\beta}_2 = \beta_1\sqrt[3]{\beta}_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}+\frac{16\pi i}{9}} = e^{\frac{4\pi i}{9}}$$

Otteniamo allora le seguenti radici di $f(x)$:

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{\beta_1} + \sqrt[3]{\beta_2} = 2\cos(\frac{2\pi}{9})$$
$$\alpha_2 = \omega\sqrt[3]{\beta_1} + \omega^2\sqrt[3]{\beta_2} = 2\cos(\frac{8\pi}{9})$$
$$\alpha_3 = \omega^2\sqrt[3]{\beta_1} + \omega\sqrt[3]{\beta_2} = 2\cos(\frac{14\pi}{9})$$

Guardando la forma delle tre radici di $f(x)$ possiamo giustificare il fatto che il gruppo di Galois sia isomorfo ad $A_3 = \langle(123)\rangle$, e quindi consenta solo rotazioni tra le radici. È chiaro, infatti, che l'unica simmetria che sussiste tra le radici è quella che porta dalla prima alla seconda, dalla seconda alla terza e dalla terza alla prima sommando $\frac{2\pi}{3}$ all'argomento del coseno.

Osservazione 14.3 Nell'Osservazione 8.11 avevamo descritto il ruolo del discriminante nella classificazione delle radici di un polinomio cubico reale. Il risultato ottenuto nell'Esempio 14.2 è in pieno accordo con il caso 2: $f(x)$ ha tre radici reali distinte e $\Delta = 81 > 0$.

Nota storica Il polinomio dell'Esempio 14.2 ha tre radici reali, ma, per trovarle, abbiamo dovuto far ricorso ai numeri complessi: infatti il discriminante dell'equazione quadratica ausiliaria (3) è negativo, e quindi abbiamo dovuto estrarre la radice quadrata da un numero negativo. L'esigenza di effettuare questa operazione formale per applicare le formule di Tartaglia-Cardano ha spinto, nella seconda metà del Cinquecento, il matematico bolognese Rafael Bombelli ad inventare l'unità immaginaria.

Equazioni quartiche

Diamo un procedimento risolutivo ispirato a quello sviluppato, nel Cinquecento, da Ludovico Ferrari (1522-1565). Supporremo che la caratteristica di F sia diversa da 2 e da 3.

Sia $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a, b, c, d \in F$. Dobbiamo risolvere l'equazione

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Separiamo i termini

$$x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d$$

e completiamo il quadrato a primo membro:

$$(x^2 + \frac{a}{2}x)^2 = (\frac{a^2}{4} - b)x^2 - cx - d.$$

Quindi sommiamo su entrambi i membri un'espressione polinomiale in y che trasforma il primo membro in un altro quadrato perfetto:

$$(x^2 + \frac{a}{2}x)^2 + y(x^2 + \frac{a}{2}x) + \frac{y^2}{4} = (\frac{a^2}{4} - b + y)x^2 + (\frac{a}{2}y - c)x + \frac{y^2}{4} - d$$

Riscriviamo l'equazione in una forma più compatta:

$$(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y}{2})^2 = Ax^2 + Bx + C. \tag{4}$$

La (4) diventa facilmente risolubile se l'espressione a secondo membro è un quadrato perfetto. Ciò avviene se e solo se $B^2 - 4AC = 0$. Quest'ultima è un'equazione nell'incognita y:

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y + 4bd - a^2d - c^2 = 0. \tag{5}$$

Il primo membro è il risolvente di $f(x)$ introdotto nella Lezione 13. Supponiamo di aver risolto la (5) mediante le formule di Tartaglia-Cardano. Sostituiamo le soluzioni $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ trovate al posto di y in (4); otteniamo così equazioni della forma

$$(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{\beta_i}{2})^2 = (ex + f)^2.$$

Ognuna di esse si decompone nelle due equazioni quadratiche

$$x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{\beta_i}{2} = ex + f, \quad x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{\beta_i}{2} = -(ex + f). \tag{6}$$

Le soluzioni di queste sono le radici di $f(x) = 0$.

Esempio 14.4 Il polinomio $f(x)=x^4-4x^3+4x^2+6$ dell'Esempio 13.8 b) ha in **C** le seguenti radici:

$$\alpha_1=1+\sqrt{\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{1}{2}},\quad \alpha_2=1+\sqrt{\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{1}{2}},$$
$$\alpha_3=1-\sqrt{\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{1}{2}},\quad \alpha_4=1-\sqrt{\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{1}{2}}.$$

Nota Le soluzioni ottenute dal programma *Mathematica* 9 appaiono così:

```
In[2]:= Solve[x^4 - 4 x^3 + 4 x^2 + 6 == 0, x]
```

$$\text{Out[2]=}\ \left\{\left\{x\to 1-\sqrt{1-i\sqrt{6}}\right\},\left\{x\to 1+\sqrt{1-i\sqrt{6}}\right\},\left\{x\to 1-\sqrt{1+i\sqrt{6}}\right\},\left\{x\to 1+\sqrt{1+i\sqrt{6}}\right\}\right\}$$

È evidente che si tratta di soluzioni di equazioni quadratiche (le (6)), scritte utilizzando la nota formula con il discriminante: l'inconveniente è, però, che tali equazioni hanno coefficienti complessi non reali. Ciò spiega la presenza dell'unità immaginaria sotto il segno di radice quadrata.
È possibile ricavare formule che esprimono le soluzioni dell'equazione quadratica in termini delle radici β_1,β_2,β_3 del polinomio risolvente $r(x)$. Queste sono legate alle radici $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ del polinomio $f(x)$ dalle seguenti relazioni, viste nella Lezione 13, che riscriviamo, permutando gli indici:

$$\beta_1=\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3$$
$$\beta_2=\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3$$
$$\beta_3=\alpha_3\alpha_4+\alpha_1\alpha_2$$

Si ricava, dalla prima,

$$\beta_1=\alpha_1(-a-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)+\alpha_2\alpha_3=-a\alpha_1-\alpha_1^{\ 2}-\alpha_1\alpha_2-\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3,$$

e, dalla seconda,

$$\beta_2=\alpha_2(-a-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)+\alpha_1\alpha_3=-a\alpha_2-\alpha_1\alpha_2-\alpha_2^{\ 2}-\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3.$$

Pertanto

$$\beta_1+\beta_2=-a(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_1+\alpha_2)^2.$$

Assumendo, a meno di un cambio lineare di indeterminata, che sia $a = 0$, si ricava che

$$\alpha_1+\alpha_2=\sqrt{-(\beta_1+\beta_2)}\,.$$

Si ricavano, in maniera analoga, altre simili rappresentazioni per le restanti somme $\alpha_i+\alpha_j$. Se ne deducono le seguenti formule esplicite per le radici:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{-(\beta_1+\beta_2)} - \sqrt{-(\beta_2+\beta_3)} + \sqrt{-(\beta_1+\beta_3)}\right)$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{-(\beta_1+\beta_2)} + \sqrt{-(\beta_2+\beta_3)} - \sqrt{-(\beta_1+\beta_3)}\right)$$
$$\alpha_3 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{-(\beta_1+\beta_2)} + \sqrt{-(\beta_2+\beta_3)} + \sqrt{-(\beta_1+\beta_3)}\right)$$
$$\alpha_4 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{-(\beta_1+\beta_2)} - \sqrt{-(\beta_2+\beta_3)} - \sqrt{-(\beta_1+\beta_3)}\right)$$

****Nota** Usualmente si attribuisce il nome di *formule di Ferrari* ad espressioni esplicite per le soluzioni di un'equazione di quarto grado che, però, sono basate su un metodo risolutivo lievemente diverso: viene utilizzato un altro risolvente di grado 3. Per i dettagli si può consultare [DF], pagg.615 e seguenti, oppure [G], 5.2.g.