Lezione 4

Prerequisiti: Applicazioni tra insiemi. Lezioni 2 e 3.

Gruppi di permutazioni

In questa lezione introduciamo una classe infinita di gruppi non abeliani.

Definizione 4.1 Sia X un insieme non vuoto. Si dice *permutazione* su X ogni applicazione bigettiva di X in se stesso. Denoteremo con $S(X)$ l'insieme delle permutazioni su X.

Proposizione 4.2 L'insieme $S(X)$ è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni.

Dimostrazione: La composizione di due permutazioni di X è ancora una permutazione di X: infatti, se $f: X \to X, g: X \to X$ sono applicazioni bigettive, bigettiva è anche l'applicazione composta $g \circ f: X \to X$. Dunque la composizione di applicazioni è un'operazione binaria definita in $S(X)$. Verifichiamo ora che tale operazione soddisfa le proprietà della definizione di gruppo (Definizione 2.3). L'associatività è nota dalla teoria delle applicazioni. L'elemento neutro è l'applicazione identica id_X. Infine, per ogni $f \in S(X)$, l'applicazione inversa f^{-1} appartiene anch'essa ad $S(X)$; poiché $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_X$, essa è dunque il simmetrico di f in $S(X)$. □

Definizione 4.3 Sia n un intero positivo, ed $X = \{1, 2, ..., n\}$. Allora il gruppo $S(X)$ viene detto *gruppo simmetrico* (oppure *gruppo delle permutazioni*) *su n elementi* e denotato S_n (oppure $Sym(n)$).

Esempio 4.4 Determiniamo i gruppi S_1, S_2.

(a) L'unica applicazione $\{1\} \to \{1\}$ è l'applicazione identica. Quindi S_1 è un gruppo banale.

(b) Vi sono esattamente due applicazioni bigettive $\{1, 2\} \to \{1, 2\}$, ossia l'applicazione identica e l'applicazione definita da $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1$. Questi sono i due elementi di S_2.

Nota In generale, per indicare un elemento σ di S_n si può utilizzare la cosiddetta *notazione matriciale*, nella quale sono riportate (nella seconda riga) le immagini secondo σ degli elementi $1, 2, ..., n$ (scritti nella prima riga):

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

In questa notazione, l'applicazione identica corrisponde ad una matrice con due righe uguali:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

Indicheremo tale applicazione (detta *permutazione identica*), più semplicemente, con il simbolo *id*.

In base a quanto stabilito nell'Esempio 4.4, possiamo dunque scrivere:

$S_1 = \{id\}$,

$S_2 = \left\{ id, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 4.5 Determinare, in notazione matriciale, tutti gli elementi di S_3.

<u>Svolgimento</u>: Le notazioni matriciali degli elementi di S_3 si ottengono disponendo gli elementi $1,2,3,$ secondo tutti gli ordini possibili, nella seconda riga della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$. Il risultato è il seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Questi sono i 6 elementi di S_3.

Esiste una facile formula generale per il numero di elementi di S_n.

Proposizione 4.6 (*Ordine di* S_n) Per ogni intero positivo n, S_n ha ordine $n!$.

<u>Dimostrazione</u>: Osserviamo preliminarmente che il numero di elementi di S_n è pari al numero di disposizioni (senza ripetizioni) dei numeri interi $1,2,...,n$ (o, più in generale, di n oggetti a due a due distinti).
Dimostriamo la tesi per induzione su n. In base a quanto visto nell'Esempio 4.4 (a), la tesi è vera per $n = 1$. Sia ora $n > 1$ e supponiamo la tesi vera per $n-1$. Ogni disposizione dei numeri $1,2,...,n$ si ottiene scegliendo uno dei numeri come primo numero, ed occupando le posizioni dalla seconda alla n-esima con una disposizione dei restanti $n-1$ numeri. Queste ultime, per l'ipotesi induttiva, sono $(n-1)!$, mentre le possibili scelte del primo numero sono n. Complessivamente, le possibili disposizioni dei numeri $1,2,...,n$ sono, pertanto, $(n-1)!n = n!$. Ciò prova che S_n ha $n!$ elementi. □

Esempio 4.7 Riportiamo in tabella gli ordini dei gruppi S_n, con $n = 1,...,6$.

n	Ordine di S_n
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720

Esercizio 4.8* Determinare tutti gli elementi di S_4.

Nella Lezione 2 abbiamo determinato la struttura di tutti i gruppi di ordine 1 o 2, ed abbiamo constatato che questi sono tutti abeliani. Da ciò deduciamo che, in particolare, i gruppi S_1 ed S_2 sono abeliani. Questa proprietà non vale, però, per gli altri gruppi simmetrici.

Proposizione 4.9 *(Commutatività dei gruppi simmetrici)* Il gruppo S_n è abeliano se e solo se $n \leq 2$.

Dimostrazione: In base a quanto osservato, basta provare che, per ogni $n \geq 3$, S_n non è abeliano. Sia $n \geq 3$, e siano $\sigma, \tau \in S_n$ le permutazioni così definite:

$$\sigma(1) = 2,\ \sigma(2) = 1,\ \sigma(i) = i, \text{ per ogni altro } i,$$
$$\tau(1) = 3,\quad \tau(3) = 1,\ \tau(i) = i, \text{ per ogni altro } i.$$

Allora $\sigma \circ \tau(1) = \sigma(3) = 3$, mentre $\tau \circ \sigma(1) = \tau(2) = 2$. Dunque $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$. □

Esercizio 4.10 Determinare, in S_3, le permutazioni σ e τ della precedente dimostrazione, e calcolare $\sigma \circ \tau$ e $\tau \circ \sigma$, utilizzando la notazione matriciale.

Svolgimento: In notazione matriciale

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Osservazione 4.11 Il gruppo S_3 è il più piccolo esempio di gruppo non abeliano. Si può infatti dimostrare che ogni gruppo finito di ordine al più 5 è abeliano.

Diamo ora un criterio di classificazione per le permutazioni. Sia $n \geq 2$ un intero. Per ogni polinomio $p = p(x_1, \ldots, x_n)$ a coefficienti interi nelle indeterminate $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (di questa nozione daremo più avanti una definizione formale) poniamo $\sigma(p) = p(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$, che è il polinomio ottenuto sostituendo, in p, ogni indice i con $\sigma(i)$. Consideriamo il polinomio

$$p_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

Allora

$$\sigma(p_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}),$$

In questa operazione, il fattore $(x_i - x_j)$ viene trasformato nel fattore $(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})$: essendo σ un'applicazione iniettiva, e $i \neq j$, si ha che $\sigma(i) \neq \sigma(j)$. Dunque, se $\sigma(i) < \sigma(j)$, $(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})$ è uno dei fattori di p_n, e se $\sigma(i) > \sigma(j)$, $-(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}) = (x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(i)})$ è uno dei fattori di p_n. Inoltre, in virtù dell'iniettività di σ, se i, j, k, l sono indici tali che $1 \le i < j \le n, 1 \le k < l \le n$, e $(i, j) \neq (k, l)$, allora $\{\sigma(i), \sigma(j)\} \neq \{\sigma(k), \sigma(l)\}$. Infatti, se i due insiemi fossero uguali, essendo σ iniettiva e $i \neq k$ oppure $j \neq l$, si avrebbe necessariamente $\sigma(i) = \sigma(l)$, $\sigma(j) = \sigma(k)$, e dunque $i = l$ e $j = k$; ciò, però, è incompatibile con le disuguaglianze indicate sopra.
In conclusione, i fattori di $\sigma(p_n)$ sono dunque, a meno di cambi di segno, gli stessi di p_n. Pertanto, $\sigma(p_n) = p_n$ oppure $\sigma(p_n) = -p_n$: il primo caso si verifica se i fattori cambiati di segno sono in numero pari, il secondo caso se i fattori cambiati di segno sono in numero dispari.

Esempio 4.12 Per $n = 3$ il polinomio da considerare è

$$p_3 = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$$

Sia $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Allora

$$\sigma(p_3) = (x_2 - x_3)(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) = (x_2 - x_3)(-(x_1 - x_2))(-(x_1 - x_3)) = (x_2 - x_3)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) = p_3,$$

poiché si sono effettuati due cambi di segno. Invece, se $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, allora

$$\tau(p_3) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3) = -(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3) = -p_3,$$

dove si è effettuato un solo cambio di segno.

Definiamo ora l'applicazione

$$s : S_n \to \{-1, 1\}$$

ponendo

$$\begin{cases} s(\sigma) = 1 & \text{se } \sigma(p_n) = p_n, \\ s(\sigma) = -1 & \text{se } \sigma(p_n) = -p_n; \end{cases}$$

ossia, equivalentemente: $\quad s(\sigma) = \dfrac{\sigma(p_n)}{p_n}.$

Proviamo che s è un omomorfismo di gruppi. Siano $\sigma, \tau \in S_n$. Allora

$$s(\sigma \circ \tau) = \frac{\sigma \circ \tau(p_n)}{p_n} = \frac{\sigma(\tau(p_n))}{p_n} = \frac{\sigma(\tau(p_n))}{\tau(p_n)} \frac{\tau(p_n)}{p_n},$$

ove

$$\frac{\sigma(\tau(p_n))}{\tau(p_n)} = \begin{cases} \dfrac{\sigma(p_n)}{p_n} & \text{se } \tau(p_n) = p_n; \\ \dfrac{\sigma(-p_n)}{-p_n} = \dfrac{-\sigma(p_n)}{-p_n} = \dfrac{\sigma(p_n)}{p_n} & \text{se } \tau(p_n) = -p_n. \end{cases}$$

Dunque

$$s(\sigma \circ \tau) = \frac{\sigma(p_n)}{p_n}\frac{\tau(p_n)}{p_n} = s(\sigma)s(\tau).$$

Ciò prova che s è un omomorfismo di gruppi.

Definizione 4.13 Una permutazione $\sigma \in S_n$ si dice *(di segno o di classe) pari* se $\sigma(p_n) = p_n$. Altrimenti si dice *(di segno o di classe) dispari.*

Esempio 4.14 Nell'Esempio 4.12, la permutazione $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$ è pari, la permutazione $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_3$ è dispari.

Osservazione 4.15 Dal fatto che s è un omomorfismo di gruppi si deduce la seguente regola di composizione per le permutazioni pari e dispari:

- se $\sigma, \tau \in S_n$ sono entrambe pari o entrambe dispari, allora $\sigma \circ \tau$ è pari;
- altrimenti $\sigma \circ \tau$ è dispari.

In particolare, il sottoinsieme delle permutazioni pari di S_n è chiuso rispetto alla composizione. In effetti si ha:

Proposizione 4.16 *(Gruppo alterno)* Sia n un intero positivo. L'insieme delle permutazioni pari di S_n è un sottogruppo di S_n (detto *gruppo alterno su n elementi*, e denotato A_n). Si pone, per convenzione, $A_1 = S_1$.

<u>Dimostrazione</u>: L'insieme delle permutazioni pari di S_n è il nucleo dell'omomorfismo s. La tesi segue allora dal Corollario 3.5. □

Esempio 4.17 In S_2, la permutazione $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ è dispari: infatti $p_2 = x_1 - x_2$, così che $\alpha(p_2) = x_2 - x_1 = -p_2$. Dunque $A_2 = \{id\}$.

Per ogni intero positivo n, la permutazione identica $id \in S_n$ è pari.

Quanto stabilito per la permutazione α dell'Esempio 4.17 si può generalizzare.

Esercizio 4.18 Sia $n \geq 2$. Sia $\alpha \in S_n$ la permutazione definita da $\alpha(1) = 2, \alpha(2) = 1, \alpha(i) = i$ per ogni $i = 3, \ldots, n$.

(a) Provare che α è dispari.

(b) Provare che $\alpha \circ \alpha = id$.

Svolgimento: (a) Basta provare la tesi per $n \geq 3$. Si ha

$$p_n = (x_1 - x_2)\prod_{j=3}^{n}(x_1 - x_j)\prod_{j=3}^{n}(x_2 - x_j) \cdot q,$$

ove q è il prodotto dei restanti fattori (quelli in cui x_1, x_2 non compaiono; se $n = 3$, non vi sono ulteriori fattori e quindi si pone $q = 1$).

Quindi

$$\alpha(p_n) = (x_2 - x_1)\prod_{j=3}^{n}(x_2 - x_j)\prod_{j=3}^{n}(x_1 - x_j) \cdot q = -(x_1 - x_2)\prod_{j=3}^{n}(x_1 - x_j)\prod_{j=3}^{n}(x_2 - x_j) \cdot q = -p_n.$$

Ciò prova che α è dispari.

(b) Si ha

$$\begin{aligned} &\alpha \circ \alpha(1) = \alpha(\alpha(1)) = \alpha(2) = 1, \\ &\alpha \circ \alpha(2) = \alpha(\alpha(2)) = \alpha(1) = 2, \\ &\alpha \circ \alpha(i) = \alpha(\alpha(i)) = \alpha(i) = i, \quad \text{per ogni } i = 3, \dots, n. \end{aligned}$$

Ciò prova che $\alpha \circ \alpha(i) = i$ per ogni $i = 1, \dots, n,$ da cui la tesi.

Possiamo ora dimostrare una formula generale per l'ordine di A_n.

Proposizione 4.19 (*Ordine di* A_n) Per ogni intero $n \geq 2$, A_n ha ordine $\frac{n!}{2}$.

Dimostrazione: Sia $n \geq 2$. Sia B_n l'insieme delle permutazioni dispari di S_n. Allora si ha $S_n = A_n \cup B_n$, ove l'unione è disgiunta. Pertanto

$$|S_n| = |A_n| + |B_n|. \tag{1}$$

Sia $\alpha \in S_n$ la permutazione definita nell'Esercizio 4.18. Definiamo un'applicazione $\varphi : A_n \to B_n$ ponendo $\varphi(\sigma) = \sigma \circ \alpha$ per ogni $\sigma \in A_n$. Notiamo che φ è ben definita: infatti, in base alle regole di composizione stabilite nell'Osservazione 4.15, se $\sigma \in A_n$ (ossia se σ è pari), allora, essendo α dispari, anche $\sigma \circ \alpha$ è dispari, cioè $\sigma \circ \alpha \in B_n$. Proviamo che φ è invertibile. Sia $\psi : B_n \to A_n$ l'applicazione definita ponendo $\psi(\sigma) = \sigma \circ \alpha$ per ogni $\sigma \in B_n$. Si verifica, analogamente a quanto appena fatto per φ, che anche ψ è ben definita. Si ha, per ogni $\sigma \in A_n$,

$$\psi \circ \varphi(\sigma) = \psi(\varphi(\sigma)) = \psi(\sigma \circ \alpha) = (\sigma \circ \alpha) \circ \alpha = \sigma \circ (\alpha \circ \alpha) = \sigma \circ id = \sigma.$$

Ciò prova che $\psi \circ \varphi = id_{A_n}$. Analogamente si prova che $\varphi \circ \psi = id_{B_n}$. Si conclude che ψ è l'applicazione inversa di φ. Dunque φ è invertibile, ossia è bigettiva. Segue che $|A_n| = |B_n|$. Allora dalla (1) si deduce che $|S_n| = 2|A_n|$, ossia $|A_n| = \frac{|S_n|}{2} = \frac{n!}{2}$, ove l'ultima uguaglianza segue dalla Proposizione 4.6. □

Esercizio 4.20 Determinare A_3.

Svolgimento: Dalla Proposizione 4.19 sappiamo che A_3 ha 3 elementi. Uno di questi è la permutazione identica *id*. Cerchiamo gli altri due elementi. Ora, nell'Esempio 4.14 abbiamo stabilito che $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in A_3$. Essendo A_3 un sottogruppo di S_3, ad A_3 appartiene anche la permutazione inversa di $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, che è $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dunque

$$A_3 = \left\{ id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Osservazione 4.21 Possiamo dare la tavola di composizione del gruppo A_3, che ha la stessa struttura di tutti i gruppi aventi ordine 3. Se si pone $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, la tavola di composizione è la seguente:

$\circ$	id	σ	τ
id	id	σ	τ
σ	σ	τ	id
τ	τ	id	σ

Esercizio 4.22 Determinare tutti gli elementi di A_4.

Svolgimento: Dalla Proposizione 4.19 sappiamo che A_4 ha $\frac{4!}{2} = 12$ elementi. Uno di questi è *id*. Determiniamo gli altri 11. A fronte dell'Esempio 4.14, siamo indotti a ritenere che la permutazione $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_4$ possa essere pari. Lo potremmo verificare sulla base della Definizione 4.13, calcolando $\sigma(p_4)$. Scegliamo una via diversa, che sfrutta la struttura di gruppo di S_4. Osserviamo che

$$\sigma \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$\sigma \circ \sigma \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = id.$$

Poiché *id* è pari, segue che σ è pari: altrimenti, in base alle regole di moltiplicazione date nell'Osservazione 4.15, $\sigma\circ\sigma\circ\sigma$ sarebbe dispari. Dal fatto che σ è pari segue, in virtù delle stesse regole, che anche $\sigma\circ\sigma$ è pari. Abbiamo dunque trovato due nuovi elementi di A_4:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}\in A_4,\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\in A_4.$$

Notiamo che l'effetto di σ su $1,2,3,4$ è quello di "ruotare" i primi tre elementi di una posizione verso sinistra (trasformando la sequenza $1,2,3$ nella sequenza $2,3,1$), lasciando fisso il quarto (4 viene inviato in se stesso). Le considerazioni effettuate su σ si possono naturalmente applicare ad ogni altra permutazione τ che ruoti tre elementi di una posizione verso sinistra lasciando fisso il restante elemento. Tutte queste permutazioni τ e le permutazioni $\tau\circ\tau$ sono dunque pari. Ciò ci fornisce altri 6 elementi di A_4: due per ogni scelta dell'elemento, (3, 2 o 1) da lasciare fisso (in colore sono evidenziati gli elementi sottoposti a "rotazione").

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix}\in A_4,\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\in A_4,$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}\in A_4,\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\in A_4, \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}\in A_4,\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix}\in A_4.$$

Restano da determinare 3 elementi.
Per ogni coppia di indici distinti $i,j\in\{1,2,3,4\}$ chiamiamo $\tau_{ij}\in S_4$ la permutazione che "scambia" *i* e *j* (ossia invia *i* in *j* e *j* in *i*) lasciando fissi gli altri due elementi. In particolare abbiamo così che τ_{12} è la permutazione α dell'Esercizio 4.18. Se $i,j\in\{3,4\}$, si ha

$$\tau_{2i}=\tau_{1i}\circ\tau_{12}\circ\tau_{1i},\quad \tau_{1j}=\tau_{2j}\circ\tau_{12}\circ\tau_{2j},$$

e inoltre

$$\tau_{34}=\tau_{24}\circ\tau_{13}\circ\tau_{12}\circ\tau_{13}\circ\tau_{24}.$$

Da ciò si deduce che ogni permutazione τ_{ij} è dispari. Segue che le permutazioni

$$\tau_{12}\circ\tau_{34}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix},$$
$$\tau_{13}\circ\tau_{24}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix},$$
$$\tau_{14}\circ\tau_{23}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

sono pari. Questi sono i restanti elementi di A_4.