Lezione 16

Prerequisiti: Lezioni 2, 5, 9.

Prodotti diretti

In questa lezione diamo una costruzione generale che permette di ottenere, a partire da una coppia di gruppi o di anelli, un nuovo gruppo o un nuovo anello, rispettivamente.

Siano $(G_1, *_1), (G_2, *_2)$ gruppi. Sul prodotto cartesiano $G_1 \times G_2$ definiamo la seguente operazione:

$$\begin{aligned} *_1 \times *_2 : (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) &\to G_1 \times G_2 \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &\mapsto (x_1 *_1 y_1, x_2 *_2 y_2) \end{aligned}$$

Proposizione 16.1 $(G_1 \times G_2, *_1 \times *_2)$ è un gruppo (detto *prodotto diretto di* $(G_1, *_1)$ e $(G_2, *_2)$**)**. Se e_1 ed e_2 sono gli elementi neutri di G_1 e G_2, allora (e_1, e_2) è l'elemento neutro di $G_1 \times G_2$. Inoltre, per ogni $x_1 \in G_1$ ed ogni $x_2 \in G_2$, il simmetrico di (x_1, x_2) è $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, essendo $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$ i simmetrici di x_1 e x_2 in G_1 e G_2 rispettivamente.

<u>Dimostrazione</u>: Proviamo anzitutto che l'operazione $*_1 \times *_2$ è associativa. Siano $x_1, y_1, z_1 \in G_1, x_2, y_2, z_2 \in G_2$. Allora

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) *_1 \times *_2 \left((y_1, y_2) *_1 \times *_2 (z_1, z_2)\right) &= (x_1, x_2) *_1 \times *_2 (y_1 *_1 z_1, y_2 *_2 z_2) = (x_1 *_1 (y_1 *_1 z_1), x_2 *_2 (y_2 *_2 z_2)) \\ &= ((x_1 *_1 y_1) *_1 z_1, (x_2 *_2 y_2) *_2 z_2) = (x_1 *_1 y_1, x_2 *_2 y_2) *_1 \times *_2 (z_1, z_2) \\ &= \left((x_1, x_2) *_1 \times *_2 (y_1, y_2)\right) *_1 \times *_2 (z_1, z_2). \end{aligned}$$

La terza uguaglianza deriva dalla proprietà associativa delle operazioni $*_1$ e $*_2$.
Per ogni $x_1 \in G_1, x_2 \in G_2$ si ha

$$(x_1, x_2) *_1 \times *_2 (e_1, e_2) = (x_1 *_1 e_1, x_2 *_2 e_2) = (x_1, x_2) = (e_1 *_1 x_1, e_2 *_2 x_2) = (e_1, e_2) *_1 \times *_2 (x_1, x_2).$$

Ciò prova che (e_1, e_2) è l'elemento neutro di $G_1 \times G_2$. Infine,

$$(x_1, x_2) *_1 \times *_2 (\overline{x}_1, \overline{x}_2) = (x_1 *_1 \overline{x}_1, x_2 *_2 \overline{x}_2) = (e_1, e_2) = (\overline{x}_1 *_1 x_1, \overline{x}_2 *_2 x_2) = (\overline{x}_1, \overline{x}_2) *_1 \times *_2 (x_1, x_2).$$

Ciò prova che il simmetrico di (x_1, x_2) è $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$. □

Nota I gruppi $(G_1, *_1)$ e $(G_2, *_2)$ si dicono *primo* e *secondo fattore diretto* del gruppo prodotto diretto $(G_1 \times G_2, *_1 \times *_2)$.

Proposizione 16.2 *(Commutatività del prodotto diretto di gruppi)* Il gruppo prodotto diretto $(G_1 \times G_2,\ *_1 \times *_2)$ è abeliano se e solo se i fattori diretti $(G_1, *_1)$ e $(G_2, *_2)$ sono abeliani.

Dimostrazione: Supponiamo che $(G_1, *_1)$ e $(G_2, *_2)$ siano abeliani. Allora, per ogni $x_1, y_1 \in G_1, x_2, y_2 \in G_2$, si ha

$$(x_1, x_2) *_1 \times *_2 (y_1, y_2) = (x_1 *_1 y_1, x_2 *_2 y_2) = (y_1 *_1 x_1, y_2 *_2 x_2) = (y_1, y_2) *_1 \times *_2 (x_1, x_2).$$

Ciò prova che $(G_1 \times G_2,\ *_1 \times *_2)$ è abeliano. Viceversa, supponiamo che $(G_1 \times G_2,\ *_1 \times *_2)$ sia abeliano. Allora per ogni $x_1, y_1 \in G_1, x_2, y_2 \in G_2$,

$$(x_1, x_2) *_1 \times *_2 (y_1, y_2) = (y_1, y_2) *_1 \times *_2 (x_1, x_2),$$

cioè

$$(x_1 *_1 y_1, x_2 *_2 y_2) = (y_1 *_1 x_1, y_2 *_2 x_2),$$

e quindi $x_1 *_1 y_1 = y_1 *_1 x_1,\ x_2 *_2 y_2 = y_2 *_2 x_2$. Ciò prova che $(G_1, *_1)$ e $(G_2, *_2)$ sono abeliani. □

Esempio 16.3 Se *n*,*m* sono interi maggiori di 1, il prodotto diretto $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ è un gruppo abeliano avente come elemento neutro $([0]_n, [0]_m)$. Se *n* è un intero positivo, il prodotto diretto $\mathbb{Z} \times S_n$ è un gruppo avente come elemento neutro $(0, id)$, e, in base alla Proposizione 4.9, è abeliano se e solo se $n \leq 2$.

Una costruzione analoga a quella che abbiamo appena visto si può effettuare sugli anelli.

Siano $(A_1, +_1, \cdot_1)$ e $(A_2, +_2, \cdot_2)$ anelli. Sul prodotto cartesiano $A_1 \times A_2$ definiamo le seguenti operazioni:

$$\begin{aligned} +_1 \times +_2 : (A_1 \times A_2) \times (A_1 \times A_2) &\to A_1 \times A_2 \\ ((a_1, a_2), (b_1, b_2)) &\mapsto (a_1 +_1 b_1, a_2 +_2 b_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot_1 \times \cdot_2 : (A_1 \times A_2) \times (A_1 \times A_2) &\to A_1 \times A_2 \\ ((a_1, a_2), (b_1, b_2)) &\mapsto (a_1 \cdot_1 b_1, a_2 \cdot_2 b_2) \end{aligned}$$

Le seguenti due proposizioni si dimostrano in maniera analoga alle Proposizioni 16.1 e 16.2 rispettivamente.

Proposizione 16.4 $(A_1 \times A_2,\ +_1 \times +_2, \cdot_1 \times \cdot_2)$ è un anello (detto *prodotto diretto di* $(A_1, +_1, \cdot_1)$ e $(A_2, +_2, \cdot_2)$**)**. Il suo gruppo additivo è il prodotto diretto dei gruppi $(A_1, +_1)$ e $(A_2, +_2)$.

Nota Gi anelli $(A_1, +_1, \cdot_1)$ e $(A_2, +_2, \cdot_2)$ si dicono *primo* e *secondo fattore diretto* dell'anello prodotto diretto $(A_1 \times A_2,\ +_1 \times +_2, \cdot_1 \times \cdot_2)$.
Per semplicità, indicheremo la somma ed il prodotto di $A_1 \times A_2$ con gli usuali simboli $+$ e $\cdot$.

Proposizione 16.5 *(Commutatività del prodotto diretto di anelli)* L'anello prodotto diretto ($A_1 \times A_2$, $+_1 \times +_2, \cdot_1 \times \cdot_2$) è commutativo se e solo i fattori diretti $(A_1, +_1, \cdot_1)$ e $(A_2, +_2, \cdot_2)$ sono commutativi.

Proposizione 16.6 *(Unitarietà ed elementi invertibili del prodotto diretto di anelli)* L'anello prodotto diretto ($A_1 \times A_2$, $+_1 \times +_2, \cdot_1 \times \cdot_2$) è unitario se e solo se i fattori diretti $(A_1, +_1, \cdot_1)$ e $(A_2, +_2, \cdot_2)$ sono unitari. In tal caso, l'elemento uno di ($A_1 \times A_2$, $+_1 \times +_2, \cdot_1 \times \cdot_2$) è $(1_{A_1}, 1_{A_2})$; inoltre l'elemento $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ è invertibile se e solo se a_1 è invertibile in A_1 e a_2 è invertibile in A_2. In tal caso $(a_1, a_2)^{-1} = (a_1^{-1}, a_2^{-1})$.

<u>Dimostrazione</u>: Se gli anelli $(A_1, +_1, \cdot_1)$ e $(A_2, +_2, \cdot_2)$ sono unitari, allora il prodotto diretto ($A_1 \times A_2$, $+_1 \times +_2, \cdot_1 \times \cdot_2$) è unitario con elemento uno $(1_{A_1}, 1_{A_2})$, perché, per ogni $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$, si ha

$$(a_1, a_2)(1_{A_1}, 1_{A_2}) = (a_1 1_{A_1}, a_2 1_{A_2}) = (a_1, a_2) = (1_{A_1} a_1, 1_{A_2} a_2) = (1_{A_1}, 1_{A_2})(a_1, a_2).$$

Viceversa, se ($A_1 \times A_2$, $+_1 \times +_2, \cdot_1 \times \cdot_2$) è unitario, e (u, v) è il suo elemento uno, allora per ogni $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$, si ha

$$(a_1, a_2)(u, v) = (a_1, a_2) = (u, v)(a_1, a_2),$$

ossia

$$(a_1 u, a_2 v) = (a_1, a_2) = (u a_1, v a_2),$$

da cui $a_1 u = a_1 = u a_1, a_2 v = a_2 = v a_2$. Ciò prova che u è l'elemento uno di A_1 e v è l'elemento uno di A_2. La dimostrazione della seconda parte dell'enunciato viene lasciata per esercizio. □

Nota La seconda parte dell'enunciato si può riassumere con la seguente uguaglianza: $\mathscr{U}(A_1 \times A_2) = \mathscr{U}(A_1) \times \mathscr{U}(A_2)$.

Osservazione 16.7 Non vale un enunciato analogo alle Proposizioni 16.5 e 16.6 per l'integrità. Infatti, se A_1 e A_2 sono anelli non banali, allora il prodotto diretto $A_1 \times A_2$ non è *mai* integro (indipendentemente dall'integrità di A_1 e A_2). Infatti, se $a \in A_1$ e $b \in A_2$ sono non nulli, allora si ha $(a, 0)(0, b) = (a0, 0b) = (0, 0)$, mentre $(a, 0), (0, b)$ sono elementi non nulli di $A_1 \times A_2$. Risulta così violata, nell'anello prodotto diretto, la legge di annullamento del prodotto.

Esempio 16.8 Siano *n,m* interi maggiori di 1. Allora l'anello prodotto diretto $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ è commutativo, unitario (con elemento uno $([1]_n, [1]_m)$) e non integro.

L'anello prodotto diretto dell'Esempio 16.8 è oggetto di un interessante risultato, che mostra un'applicazione della teoria degli anelli alla risoluzione dei sistemi di congruenze lineari.

Teorema 16.9 *(Seconda formulazione del Teorema Cinese del Resto)* Siano *n,m* interi positivi e coprimi. Allora gli anelli $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ e $\mathbb{Z}_{nm}$ sono isomorfi.

<u>Dimostrazione</u>: Definiamo l'applicazione $\varphi : \mathbb{Z}_{nm} \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ ponendo, per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $\varphi([a]_{nm}) = ([a]_n, [a]_m)$. Questa applicazione è ben definita: infatti, se $a, a' \in \mathbb{Z}$ sono tali che

$[a]_{nm} = [a']_{nm}$, allora nm divide $a - a'$, quindi n divide $a - a'$, ed m divide $a - a'$, ossia $[a]_n = [a']_n$ e $[a]_m = [a']_m$, cioè $([a]_n, [a]_m) = ([a']_n, [a']_m)$. Inoltre φ è un omomorfismo di anelli: per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\varphi([a]_{nm} + [b]_{nm}) &= \varphi([a+b]_{nm}) = ([a+b]_n, [a+b]_m) = ([a]_n + [b]_n, [a]_m + [b]_m) \\ &= ([a]_n, [a]_m) + ([b]_n, [b]_m) = \varphi([a]_{nm}) + \varphi([b]_{nm}).\end{aligned}$$

e analogamente si prova che

$$\varphi([a]_{nm}[b]_{nm}) = \varphi([a]_{nm})\varphi([b]_{nm}).$$

L'omomorfismo φ è anche iniettivo: infatti, per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $[a]_{nm} \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow ([a]_n, [a]_m) = ([0]_n, [0]_m) \Leftrightarrow$ n divide a ed m divide a $\Leftrightarrow nm$ divide a, $\Leftrightarrow [a]_{nm} = [0]_{nm}$, ove, nella penultima equivalenza, l'implicazione $\Rightarrow$ segue dal fatto che n ed m sono coprimi (vedi Esercizio 7.12). Dunque il nucleo di φ è banale, il che, in virtù della caratterizzazione dei monomorfismi di anelli (Proposizione 5.41), implica che φ è iniettivo. Osserviamo infine che, essendo φ un'applicazione iniettiva tra due insiemi finiti aventi la stessa cardinalità nm, essa è anche suriettiva. Quindi, in conclusione, φ è un isomorfismo di anelli. □

Osservazione 16.10 La suriettività dell'omomorfismo φ considerato nella precedente dimostrazione significa che, dati due interi n_1, n_2 positivi coprimi, per ogni $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale che $\varphi([x]_{n_1 n_2}) = ([b_1]_{n_1}, [b_2]_{n_2})$, ossia $([x]_{n_1}, [x]_{n_2}) = ([b_1]_{n_1}, [b_2]_{n_2})$. Ciò equivale a dire che esiste $x \in \mathbb{Z}$ verificante

$$\begin{cases} x \equiv b_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv b_2 \pmod{n_2} \end{cases}$$

Si ritrova, così, la prima formulazione del Teorema Cinese del Resto (Teorema 9.9) per i sistemi di due congruenze lineari.

Corollario 16.11 Siano n,m interi positivi e coprimi. Allora si ha un isomorfismo di gruppi $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{nm}) \simeq \mathcal{U}(\mathbb{Z}_n) \times \mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$.

Dimostrazione: In base all'Esercizio 5.49, l'isomorfismo di anelli del Teorema 16.9 induce un isomorfismo di gruppi da $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{nm})$ a $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m)$. Ma quest'ultimo coincide con $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n) \times \mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$ in virtù della Proposizione 16.6. □

Esercizio 16.12* Siano G_1, G_2 gruppi. Provare che, se H_1 e H_2 sono sottogruppi di G_1 e G_2 rispettivamente, allora il prodotto diretto $H_1 \times H_2$ è un sottogruppo del prodotto diretto $G_1 \times G_2$.In generale, è vero che ogni sottogruppo di $G_1 \times G_2$ è di questa forma?
Formulare e svolgere un analogo esercizio per gli anelli.

Osservazione 16.13 La definizione di prodotto diretto si estende, in maniera naturale, a tre o più gruppi o anelli.