ESERCIZI DI VERIFICA SULL'EQUIVALENZA E SULLE TAUTOLOGIE - Soluzioni

1. Individuare le coppie di proposizioni equivalenti.

   (a) A: Di quel libro non esistono due esemplari.
   B: Di quel libro esiste un solo esemplare.

   (b) A: Non è vero che quei due insiemi abbiano un solo elemento in comune.
   B: Quei due insiemi hanno più elementi in comune.

   (c) A: Questo numero intero è divisibile per -17, 34 e 510.
   B: Questo numero intero è divisibile per -510.

   (d) A: Una "Piazza Giuseppe Garibaldi" non esiste in ogni comune italiano.
   B: In qualche comune italiano nessuna piazza è intitolata a Giuseppe Garibaldi.

   (e) A: I tre amici non hanno la stessa età.
   B: I tre amici hanno tre età diverse.

   (f) A: Il numero reale x ha un quadrato positivo.
   B: Il numero reale x non è zero.

   (g) A: Non è vero che il numero reale x sia maggiore di 3.
   B: Il numero reale x è minore di 3.

   (h) A: Non è vero che il numero intero n sia maggiore di $\frac{3}{4}$.
   B: Il numero intero n è negativo.

   (i) A: I numeri reali a,b,c sono tali che $a \neq b \neq c$.
   B: $\{a,b,c\}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ avente cardinalità 3.

2. Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti forme proposizionali siano tautologie.

(a) $(P \Rightarrow (Q \wedge \neg Q)) \Rightarrow \neg P$
(b) $(P \Rightarrow \neg P) \Rightarrow \neg P$
(c) $((P \vee \neg P) \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$
(d) $((P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P$
(e) $((P \wedge \neg Q) \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q)$
(f) $(P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
(g) $(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
(h) $((P \wedge \neg P) \vee Q) \Leftrightarrow Q$
(i) $((P \vee \neg P) \wedge Q) \Leftrightarrow Q$
(j) $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Le proposizioni elencate sono **tutte** tautologie.

(a) La proposizione si può riassumere così: se da una proposizione segue una contraddizione, la proposizione è falsa.
In effetti, ricordando che un'implicazione è falsa se e solo e è vera la premessa e falsa la conclusione, abbiamo che
- se P è vera, la prima implicazione è falsa, e dunque la seconda è vera;
- se P è falsa, la prima implicazione è vera, ed essendo $\neg P$ vera, lo è anche la seconda.

(b) In sintesi: se da una proposizione segue la sua negazione, la proposizione è falsa.
Ricordiamo che un'implicazione è sempre vera se è vera la conclusione o se è falsa la premessa. Nel nostro caso, la seconda implicazione è sempre vera, perché:
- se P è vera, la prima implicazione è falsa;
- se P è falsa, $\neg P$ è vera.

(c) Il significato è: se una proposizione segue da una tautologia, allora la proposizione è vera.
Infatti, la prima implicazione è vera se e solo se Q è vera (dato che la sua premessa è sempre vera), ma in tal caso è vera anche la seconda implicazione (poiché è vera la sua conclusione). Se la prima implicazione è falsa, la seconda è vera, essendo falsa la sua premessa.

(d) Si sta affermando che: se vale un'implicazione, ma la sua conclusione è falsa, allora anche la sua premessa è falsa.
Basta esaminare i casi in cui la premessa della seconda implicazione è vera, tenendo conto della tavola di verità della congiunzione. In tali casi, $\neg Q$ è vera, ossia Q è falsa, e, dovendo essere vera anche $P \Rightarrow Q$, necessariamente P sarà falsa. Quindi $\neg P$, conclusione della seconda implicazione, è anch'essa vera.

(e) Se valgono contemporaneamente una prima proposizione e la negazione di una seconda proposizione, oppure vale quest'ultima proposizione, allora vale una delle due proposizioni.
In effetti, la disgiunzione (premessa dell'implicazione) è vera se e solo se si verifica uno dei seguenti due casi:
- sono vere entrambe P e $\neg Q$, ed allora, in particolare, è vera P, e quindi è vera la disgiunzione $P \vee Q$;
- è vera Q, ed anche allora è vera $P \vee Q$.

Pertanto, in ogni caso, è vera anche la conclusione dell'implicazione.

(f) Leggiamo una sorta di proprietà distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione, che ammette la seguente giustificazione "combinatoria".
La proposizione a sinistra del segno di equivalenza è vera se e solo se è vera P ed è vera una fra Q ed R. Quindi è vera se e solo se una tra (P,Q) e (P,R) è una coppia di proposizioni vere.

(g) Proprietà analoga alla precedente, con i ruoli di congiunzione e disgiunzione scambiati. La proposizione a sinistra del segno di equivalenza è vera in tutti e soli i seguenti casi:
- P è vera
- oppure P è falsa, e Q ed R sono entrambe vere.

Questi sono esattamente i casi in cui le proposizioni $P \vee Q$ e $P \vee R$ sono entrambe vere.

(h) Poiché $P \wedge \neg P$ è una contraddizione, e quindi è sempre falsa, la disgiunzione proposta è vera se e solo se tale è Q.

(i) Poiché $P \vee \neg P$ è una tautologia, e quindi è sempre vera, la congiunzione proposta è vera se e solo se tale è Q.

(j) Affermazione che rispecchia l'usuale modo di effettuare deduzioni successive: se da P segue Q e da Q segue R, allora, complessivamente, da P segue R.
La conclusione $P \Rightarrow R$ dell'implicazione principale è falsa se e solo se P è vera ed R è falsa. Ma in tal caso la sua premessa non può essere vera. Infatti, se Q è vera, è falsa l'implicazione $Q \Rightarrow R$ mentre se Q è falsa, è falsa l'implicazione $P \Rightarrow Q$.