ESERCIZI DI VERIFICA SU DIMOSTRAZIONE E CONFUTAZIONE - Soluzioni

1. Dimostrare i seguenti enunciati.

   (a) Siano X, Y insiemi. Allora
$$X \setminus (X \setminus Y) = X \cap Y.$$

Dimostrazione:
Proviamo l'uguaglianza tra gli insiemi assegnati dimostrando la seguente equivalenza:

$$x \in X \setminus (X \setminus Y) \Leftrightarrow x \in X \cap Y.$$

La stabiliremo attraverso una successione di equivalenze:

$x \in X \setminus (X \setminus Y)$
$\Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin X \setminus Y \Leftrightarrow x \in X \wedge \neg(x \in X \setminus Y)$
$\Leftrightarrow x \in X \wedge \neg(x \in X \wedge x \notin Y)$ definizione di differenza tra insiemi
$\Leftrightarrow x \in X \wedge (x \notin X \vee x \in Y)$ negazione della congiunzione
$\Leftrightarrow (x \in X \wedge x \notin X) \vee (x \in X \wedge x \in Y)$ equivalenza fra $A \wedge (B \vee C)$ e $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$\Leftrightarrow x \in X \wedge x \in Y$ se Γ è una contraddizione, allora $\Gamma \vee A$ equivale ad A
$\Leftrightarrow x \in X \cap Y$ definizione di intersezione di insiemi

   (b) Siano X, Y, Z insiemi. Allora
$$(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z).$$

Dimostrazione:

Procediamo analogamente a sopra.
$x \in (X \setminus Y) \setminus Z$
$\Leftrightarrow (x \in X \wedge x \notin Y) \wedge x \notin Z \Leftrightarrow x \in X \wedge (x \notin Y \wedge x \notin Z)$ definizione di differenza tra insiemi
$\Leftrightarrow x \in X \wedge \neg(x \in Y \vee x \in Z)$ negazione della disgiunzione
$\Leftrightarrow x \in X \wedge \neg(x \in Y \cup Z)$ definizione di unione di insiemi
$\Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin Y \cup Z$
$\Leftrightarrow x \in X \setminus (Y \cup Z)$ definizione di differenza tra insiemi

2. Confutare il seguente enunciato.
   Siano *X*, *Y*, *Z* insiemi. Allora
$$X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \setminus Z.$$

   Controesempio: Si considerino gli insiemi $X = \{1,2\}, Y = \{1\}, Z = \{2\}$. Allora

$$X \setminus (Y \setminus Z) = \{1,2\} \setminus \{1\} = \{2\}, \quad \text{mentre}$$
$$(X \setminus Y) \setminus Z = \{2\} \setminus \{2\} = \varnothing.$$

3. Dimostrare il seguente enunciato.
   Se *n* è un quadrato perfetto dispari, allora $n-1$ è divisibile per 4.

   Dimostrazione: Essendo *n* un quadrato perfetto, esiste un intero *a* tale che $n = a^2$. Poiché per ipotesi *n* è dispari, anche *a* è dispari. Infatti, sappiamo che se *a* fosse pari, tale sarebbe anche *n*. Quindi esiste un intero *k* tale che $a = 2k+1$. Pertanto

$$n = a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1,$$

   e dunque $n-1 = 4(k^2+k)$ è divisibile per 4, come volevasi dimostrare.

4. Dimostrare il seguente enunciato.
   Sia *n* un numero intero.
   Se n^2 non è divisibile per 450, allora *n* non è divisibile per 60.

   Dimostrazione: Effettuiamo una dimostrazione indiretta. Proviamo che, se *n* è divisibile per 60, allora n^2 è divisibile per 450. In effetti, se esiste un intero *a* tale che $n = 60a$, allora $n^2 = 60^2 a^2 = 3600a^2 = 450(8a^2)$ è divisibile per 450.