Schema sulle serie

Marco Gallo[*,1]

[1]Dipartimento di Matematica, Università di Bari, via E. Orabona, 4, I-70125 Bari - Italy

14 settembre 2019

Scopo di queste pagine è proporre uno schema - approssimativo e informale - sulla risoluzione di una serie, i.e. determinare se essa converga o meno. Ovviamente ogni serie fa storia a sé, quindi questo procedimento non è da considerarsi esaustivo, ma può risultare comunque utile per riorganizzare le idee dopo uno studio approfondito (si vedano a tal proposito le dispense della dottoressa Lucente [1]).

Nota bene: prima di procedere, il lettore si assicuri di:

- sapere per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge e per quali no,
- saper riconoscere una serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ sotto mentite spoglie,
- sapere quanto vale il limite $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$,
- essere sicuro che $\lim_n a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_n a_n < +\infty$.

Incominciamo.

1. Se la serie dipende da un parametro $x \in \mathbb{R}$ in maniera *complicata*, basterà un cambio di variabile per semplificare i conti. Ad esempio in
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n} \log^n(x+1)$$
basterà porre $y := -\log(x+1)$ per ottenere il più semplice (a vedersi)
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n} y^n.$$
Possiamo ora ragionare in y. Il lettore si ricordi però che dovrà poi tornare nel mondo delle x; ad esempio, dalla condizione $|y| < 1$, dovrà poi risolvere $|\log(x+1)| < 1$.
N.B. Nella sostituzione si potrebbero perdere informazioni importanti, ad esempio se si pone $y := x^2$, si sta dimenticando il fatto che y è positiva, facendo di fatto allungare i tempi, invece che accorciarli.

2. Prima di proseguire, è utile soffermarsi a guardare la serie e chiedersi: la serie è qualcosa di banale? Come una serie geometrica o una serie telescopica? Se sì, la teoria risponde immediatamente alla domanda sulla convergenza, terminando quindi l'esercizio. Altrimenti occorre proseguire.

[*]email: `m.gallo29@studenti.uniba.it`; Stanza: 20, III piano.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI ALDO MORO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

3. La serie è a termini positivi? Se sì, possiamo utilizzare tutti i criteri classici. Altrimenti non c'è molto da fare se non passare all'assoluta convergenza (o alternativamente usare Leibniz, si veda il punto 5, o la condizione necessaria, si veda il punto 6).

4. Ora che la serie (originaria o assoluta) è a termini positivi, possiamo utilizzare i criteri. Tra essi troviamo:

   - Criterio della radice;
   - Criterio del rapporto;
   - Criterio degli infinitesimi e Criterio del confronto (asintotico);
   - Criterio del confronto (semplice, con disuguaglianze);
   - Criterio dell'integrale;
   - Criterio di Raabe e Criterio di condensazione.

   Quale usare? Questo sta all'intuito del lettore, e alla sua esperienza. Se l'intuito non dovesse aiutarlo, fortunatamente i criteri sono in un numero finito (e piccolo), quindi si può procedere nel provarli uno alla volta, fino a trovare quello giusto. Alcune osservazioni su questi criteri:

   a) L'implicazione
   $$\text{Assolutamente convergente} \implies \text{Convergente}$$
   vale sempre. In generale, invece,
   $$\text{Assolutamente divergente} \centernot\implies \text{Non convergente.}$$
   Quest'ultima, **però**, vale se l'assoluta divergenza la si è ottenuta dal criterio della radice o dal criterio del rapporto (Teorema 3.2 in [1]). Ciò risulta molto utile negli esercizi.
   N.B. In questo caso l'assoluta divergenza non implica la divergenza, ma soltanto la non convergenza.

   b) Se la serie dipende da un parametro, è probabile che utilizzando il criterio della radice o del rapporto si ottenga che, per alcuni valori del parametro, il limite sia uguale a 1, cioè il criterio è inconcludente. In tal caso bisogna concentrarsi su tali valori sostituendoli direttamente nella serie originaria e provando qualche nuovo criterio. È superfluo sottolineare che se si riutilizza lo stesso criterio non potrà che uscire di nuovo il valore 1.
   Spesso capita che i valori del parametro ottenuti siano due, e andandoli a sostituire si ottenga qualcosa del tipo
   $$\sum_n (-1)^n b_n \quad \text{e} \quad \sum_n b_n$$
   con b_n positivo. In tal caso osserviamo che la seconda serie non è altro che la serie dei valori assoluti della prima. Dovendole studiare entrambe, quindi, è conveniente iniziare dalla seconda poiché, nel caso in cui dovesse convergere, si otterrebbe automaticamente anche la convergenza della prima.

   d) Si può dimostrare che (Proposizione 2.10 su [1])
   $$\liminf_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_n \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_n \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$$
   da cui
   $$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \implies \exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = 1$$
   e
   $$\begin{cases} \lim_n \sqrt[n]{a_n} = 1 \\ \exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \end{cases} \implies \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Quindi, se utilizzando uno dei criteri si ottiene limite uguale a 1, non si ha speranza di ottenere qualcosa di diverso dall'altro criterio.
Entrando più nel dettaglio si ha che (Teoremi 2.6 e 2.9 su [1])

$$\limsup_n \sqrt[n]{a_n} = 1 \implies \begin{cases} \liminf_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \\ \limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \end{cases}$$

il che ulteriormente ci dice che se il criterio della radice è inconcludente, allora lo sarà anche il criterio del rapporto. L'ultima implicazione però non si inverte, il che vuol dire che potrebbe accadere (benché "raro") che il criterio del rapporto sia inconcludente, mentre il criterio della radice ci dia buone informazioni (Esempio 2.4 su [1]).

c) Nel criterio degli infinitesimi, sarebbe ottimale trovare un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1/n^\alpha}$$

sia finito e non nullo. In quel caso vorrebbe dire che $\sum_n a_n$ e $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ hanno lo stesso andamento per quel particolare α. Non sempre però ciò è possibile: soprattutto quando sono presenti funzioni logaritmiche ed esponenziali, quel limite potrebbe essere sempre nullo o sempre infinito (o entrambi, al variare di α). In tal caso vuol dire che "$a_n < \frac{1}{n^\alpha}$" se il limite è nullo, "$a_n > \frac{1}{n^\alpha}$" se il limite è infinito. Da ciò è facile trarre intuitive conclusioni sulla convergenza o divergenza di $\sum_n a_n$ in base al valore di α, senza la necessità di dover imparare schemi mnemonici.
Esempio: Supponiamo di avere

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\log(n)}$$

e calcoliamo

$$\lim_n \frac{1/\log(n)}{1/n^\alpha} = \lim_n \frac{n^\alpha}{\log(n)} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \leq 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 0 \end{cases} .$$

Come si può notare, non esiste un $\alpha \in \mathbb{R}$ che rende finito e non nullo il limite. Ragioniamo allora diversamente: se $\alpha \leq 0$ allora il limite è nullo, quindi $1/\log(n)$ è "più piccolo", quindi se $\sum_n 1/n^\alpha$ converge, anche $\sum_n 1/\log(n)$ converge; sfortunatamente, per $\alpha \leq 0$, $\sum_n 1/n^\alpha$ diverge sempre, quindi non abbiamo informazioni.
Se invece $\alpha > 0$ allora il limite è infinito, quindi $1/\log(n)$ è "più grande", quindi se $\sum_n 1/n^\alpha$ diverge, anche $\sum_n 1/\log(n)$ diverge: esistono valori di $\alpha > 0$ per cui $\sum_n 1/n^\alpha$ diverge? La risposta è affermativa: tutti gli $\alpha \in]0, 1]$; basta sceglierne uno (ad esempio $\alpha = \frac{1}{2}$) per concludere che la serie $\sum_n 1/\log(n)$ diverge.

d) Nel calcolo di qualsiasi limite, in particolare nel caso del criterio degli infinitesimi, il lettore non dimentichi tutti gli strumenti a disposizione per il calcolo dei limiti; in particolare, limiti notevoli e sviluppo di Taylor.

e) Si osservi che non è detto che basti applicare un solo criterio per risolvere una serie. Ad esempio, per la serie

$$\sum_n \frac{1}{(n+1)\log(n)}$$

può essere utile applicare prima il teorema del confronto asintotico $\sum_n \frac{1}{(n+1)\log(n)} \sim \sum_n \frac{1}{n\log(n)}$ e poi il criterio dell'integrale. Difatti, non è possibile trovare una primitiva elementare della funzione $\frac{1}{(x+1)\log(x)}$.

5. Si supponga di aver ottenuto che la serie diverge assolutamente (tramite criteri diversi da quello della radice e del rapporto), e quindi di non avere informazioni sulla serie originaria. Non rimane quindi molto da fare se non provare a utilizzare Leibniz (o la condizione necessaria, si veda il punto 6). Per dimostrare la (definitiva) decrescenza della successione abbiamo diversi modi, vediamone alcuni applicati a

$$a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

- Dimostrare che $a_{n+1} \le a_n$ per via diretta, cioè verificare quando
$$\sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \le \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$
Dato che l'arcoseno è crescente, applicandolo otteniamo
$$\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n}$$
da cui
$$n+1 \ge n$$
ovviamente vero per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- Dimostrare che $a_{n+1} \le a_n$ per via inversa, cioè partire da
$$n+1 \ge n$$
dividere, ottenendo
$$\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n}$$
e applicare la funzione seno, che per valori grandi di n (cioè valori piccoli, vicino zero, di $1/n$) è crescente, ottenendo
$$\sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \le \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$
- Attraverso la derivata, considerando la funzione
$$f(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
la cui derivata è
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
che è negativa, dato che $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ è positivo per valori grandi di x (cioè valori di $1/x$ vicino zero).

Questa informazione può essere usata, ad esempio, per discutere la serie
$$\sum_n (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right);$$
il termine $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ è infatti infinitesimo, positivo (per valori grandi di n, cioè valori di $1/n$ positivi e vicini a 0) e, per quel che abbiamo visto, decrescente. Quindi, per il criterio di Leibniz, la serie converge. Osserviamo che, invece, la corrispondente serie dei valori assoluti $\sum_n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge, poiché $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$.

6. Nel caso in cui la serie non sia risolvibile mediante criteri, rimane ancora una carta da giocare, cioè la condizione necessaria. Potrebbe accadere che la vostra successione a_n non sia infinitesima e quindi, automaticamente, la serie non converge, il che conclude direttamente l'esercizio.
N.B. Questo passaggio potrebbe essere fatto all'inizio, solo che molto spesso le informazioni ottenute sono comunque incluse in qualche criterio utilizzato successivamente. Quindi potrebbe risultare "lavoro inutile", ma di certo non errato.

Nota per lo studente: terminato l'esercizio, è buona norma fare uno schema riassuntivo indicando per quali valori del parametro la serie converge e per quali no.

Riferimenti

[1] Sandra Lucente, *Serie numeriche*, appunti del corso di Analisi 1-2 del Dipartimento di Matematica di Bari.