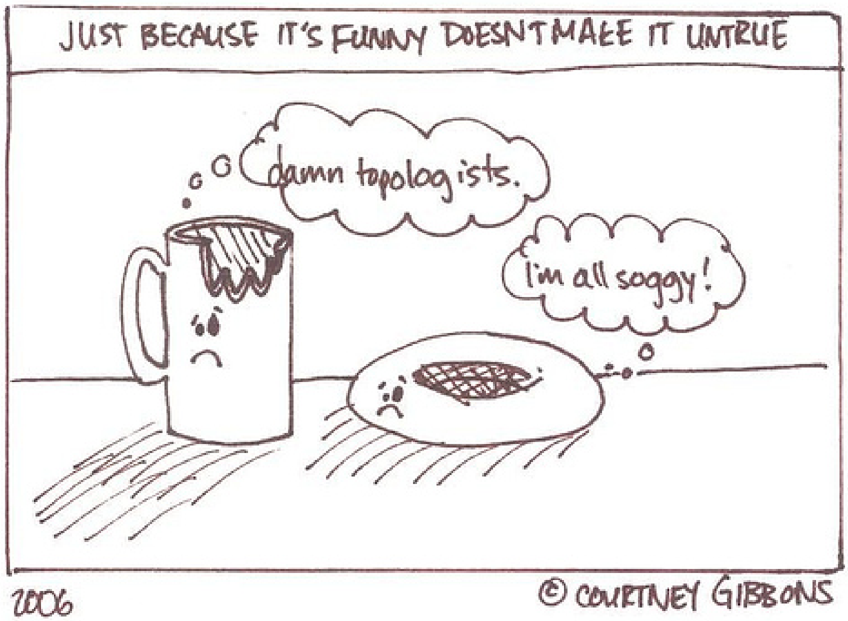
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI "ALDO MORO"

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

ESERCIZIARIO DI GEOMETRIA N.4

Tutor: dott. Dario Di Pinto



Anno Accademico 2018/2019

Introduzione

Il seguente eserciziario è frutto dell'attivitá di tutorato da me svolta durante l'a.a. 2018/2019 presso il Dipartimento di Matematica dell'Universitá degli Studi di Bari "Aldo Moro".
Esso si presenta come una raccolta di soluzioni di alcuni esercizi di topologia generale proposti nelle tracce d'esame del corso di Geometria n.4, ed è pensato per essere un supporto agli studenti in fase di preparazione dell'esame.

Seguendo la stessa struttura delle prove scritte, l'eserciziario è suddiviso in due sezioni: la prima è relativa agli esercizi di primo tipo, nei quali, assegnata una topologia su $\mathbb{R}$, si richiede di verificare alcune sue proprietà; la seconda, invece, è relativa agli esercizi del secondo tipo, che prevedono la dimostrazione di proposizioni di carattere più generale.

In alcuni casi, per uno stesso quesito, vengono presentate più soluzioni al fine di richiamare vari risultati che spesso possono rivelarsi utili per la risoluzione di altri esercizi. Tuttavia, quando ciò non accade, non è detto che lo svolgimento proposto sia l'unico o il migliore possibile e, anzi, si invita il lettore a pensare ad eventuali soluzioni alternative.

Le soluzioni di seguito riportate sono state in parte corrette dal Prof. Antonio Lotta, al quale va un doveroso e sentito ringraziamento. Nonostante ciò, non escludo la presenza di sviste di battitura e di errori matematici (spero non troppo gravi), che il lettore è invitato a segnalare.

Indice

ESERCIZI DEL PRIMO TIPO

ESERCIZIO (9/6/2017)
Si ponga
$$\tau = \{U \in \tau_0 \mid \forall x \in U \;\; \sin x > 0\} \cup \{\mathbb{R}\},$$
dove τ_0 *denota la topologia Euclidea di* $\mathbb{R}$.

1. Provare che τ *è una topologia su* $\mathbb{R}$.
2. Determinare $Int[0,1]$, $Int[0,2\pi]$, $IntE$ *rispetto a* τ, *dove* $E = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x > 0\}$.
3. Stabilire se $\mathbb{R}$ *è compatto rispetto a* τ.
4. Dimostrare che la funzione $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ *definita da* $f(x) = x + 2\pi$ *è continua.*

Svolgimento. 1. Proviamo che τ è una topologia su $\mathbb{R}$ verificando che sono soddisfatti tutti gli assiomi della definizione di topologia.

(i) $\mathbb{R} \in \tau$ per costruzione; mentre $\emptyset \in \tau$ perchè $\emptyset \in \tau_0$ e, non avendo elementi, soddisfa automaticamente la condizione $\sin x > 0 \; \forall x \in \emptyset$.

(ii) Sia $\{U_i\}_{i\in I}$ una famiglia di elementi di τ. Se esiste $j \in I$ tale che $U_j = \mathbb{R}$, allora $\bigcup_{i\in I} U_i = \mathbb{R} \in \tau$. Altrimenti, per ogni $i \in I$, $U_i \in \tau_0$ e $\forall x \in U_i$ $\sin x > 0$. Quindi $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau_0$ (poichè τ_0 è una topologia) e per ogni $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$ $\sin x > 0$. Pertanto $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$.

(iii) Siano $U_1, U_2 \in \tau$. Se almeno uno tra U_1 e U_2 coicide con $\mathbb{R}$, allora $U_1 \cap U_2 = U_i \in \tau$, con $i \in \{1,2\}$. Altrimenti per ogni $i = 1,2$, $U_i \in \tau_0$ e $\forall x \in U_i$ $\sin x > 0$. In tal caso, $U_1 \cap U_2 \in \tau_0$ (perchè τ_0 è una topologia) e $\forall x \in U_1 \cap U_2$ $\sin x > 0$. Quindi $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

Dunque, a norma di definizione, τ è una topologia su $\mathbb{R}$.

2.

- $Int[0,1] = (0,1)$. Infatti, poichè $(0,1) \in \tau_0$ e $\forall x \in (0,1)\ \sin x > 0$, $(0,1) \in \tau$ è un aperto contenuto in $[0,1]$, per cui $(0,1) \subset Int[0,1]$. In realtà vale l'uguaglianza in quanto, dovendo essere aperto in τ, $Int[0,1]$ non può essere uguale a $[0,1)$, $(0,1]$ o $[0,1]$, i quali non sono aperti in τ_0 e quindi nemmeno in τ.

- $Int[0,2\pi] = (0,\pi)$. Infatti $(0,\pi)$ è il più grande aperto di τ_0, contenuto in $[0,2\pi]$, su cui la funzione seno assume valori strettamente positivi, cioè $(0,\pi)$ è il più grande aperto di τ contenuto in $[0,2\pi]$.

- $IntE = E$ in quanto E è aperto rispetto a τ. Per mostrare ciò è sufficiente provare che è aperto in τ_0 in quanto, per come è definito, $\forall x \in E\ \sin x > 0$.
  1° MODO: Osserviamo che
  $$\sin x > 0 \iff 2k\pi < x < (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \ .$$
  Pertanto $E = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi,(2k+1)\pi) \in \tau_0$ perchè unione di intervalli aperti.
  2° MODO: $E = \sin^{-1}((0,+\infty)) \in \tau_0$ poichè controimmagine di un aperto di τ_0 mediante la funzione seno che, come funzione da $(\mathbb{R},\tau_0)$ in $(\mathbb{R},\tau_0)$, è continua.

3. $\mathbb{R}$ è compatto rispetto a τ in quanto ogni ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$ deve necessariamnete contenere $\mathbb{R}$ tra i suoi elementi (altrimenti i punti in cui il seno assume valori negativi non verrebbero ricoperti). Pertanto ogni ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$ ammette $\{\mathbb{R}\}$ come sottoricoprimento finito.

4. Sia $f : (\mathbb{R},\tau) \to (\mathbb{R},\tau)$ tale che $f(x) = x + 2\pi$. Proviamo che f è continua mostrando che $f^{-1}(U) \in \tau$ per ogni $U \in \tau$.
Certamente $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \in \tau$. Sia dunque $U \in \tau_0$ tale che $\forall x \in U\ \sin x > 0$: poichè $f : (\mathbb{R},\tau_0) \to (\mathbb{R},\tau_0)$ è continua, $f^{-1}(U) \in \tau_0$; inoltre per ogni $x \in f^{-1}(U)$, $f(x) = x + 2\pi \in U$, per cui, dalla 2π-periodicità della funzione seno, segue che $\sin x = \sin(x+2\pi) > 0$. Dunque $f^{-1}(U) \in \tau$.

$\square$

ESERCIZIO (23/6/2017)

Si ponga
$$\tau = \{U \subset \mathbb{R} \mid \mathbb{N} \subset U\} \cup \{\emptyset\} \ .$$

1. Provare che τ è una topologia su $\mathbb{R}$.
2. Provare che per ogni sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ si ha sempre $Int(E) = \emptyset$ oppure $Int(E) = E$.
3. Stabilire se $\mathbb{R}$ è compatto rispetto a τ.

4. Dimostrare che la topologia indotta da τ su $(-\infty, 0)$ è la topologia discreta.
5. Dimostrare che la funzione $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ definita da $f(x) = x + 1$ è continua.

Svolgimento. 1. Proviamo che τ è una topologia su $\mathbb{R}$ verificando che sono soddisfatti tutti gli assiomi della definizione di topologia.

(i) $\emptyset \in \tau$ per costruzione e $\mathbb{R} \in \tau$ poichè $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

(ii) Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di elementi di τ. Se gli A_i sono tutti vuoti, allora $\bigcup_{i\in I} A_i = \emptyset \in \tau$. Altrimenti, esiste $i \in I$ tale che $\mathbb{N} \subset A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$, da cui segue che $\bigcup_{i\in I} \in \tau$.

(iii) Siano $A_1, A_2 \in \tau$. Se almeno uno tra A_1 e A_2 è vuoto, allora $A_1 \cap A_2 = \emptyset \in \tau$. Altrimenti $\mathbb{N} \subset A_i$ per ogni $i = 1, 2$: in tal caso, allora, $\mathbb{N} \subset A_1 \cap A_2$, e quindi $A_1 \cap A_2 \in \tau$.

Dunque, a norma di definizione, τ è una topologia su $\mathbb{R}$.

2. Sia $E \subset \mathbb{R}$. Allora $Int(E) = \emptyset$ oppure $Int(E) \neq \emptyset$.
Se $Int(E) \neq \emptyset$, dovendo essere aperto (cioè $Int(E) \in \tau$, si ha che $\mathbb{N} \subset Int(E) \subset E$. Quindi $\mathbb{N} \subset E$ e ciò prova che $E \in \tau$, ossia che $Int(E) = E$.

3. $\mathbb{R}$ non è compatto rispetto a τ. Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, posto $A_n := (-n, +\infty)$, si ha che $A_n \in \tau$ perchè contiene $\mathbb{N}$ e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{R}$. Dunque $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ è un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$ rispetto a τ. Tuttavia questo non possiede un sottoricoprimento finito. Infatti, se così non fosse, esisterebbero $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}^*$ (con $k \geq 1$) tali che

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{k} A_i = \bigcup_{i=1}^{k} (-n_i, +\infty) = (-\overline{n}, +\infty)$$

con $\overline{n} = \max\{n_1, \ldots, n_k\} \in \mathbb{N}^*$. Ma ciò è assurdo in quanto $(-\overline{n}, +\infty)$ limitato inferiormente, mentre $\mathbb{R}$ non lo è.

4. Siano $\tau' = \{A \cap (-\infty, 0) \mid A \in \tau\}$ la topologia indotta da τ su $(-\infty, 0)$ e $\tau_d = \{U \mid U \subset (-\infty, 0)\}$ la topologia discreta su $(-\infty, 0)$.
Certamente $\tau' \subset \tau_d$ poichè la topologia discreta è la più fine di tutte le topologie. Viceversa, se $U \subset (-\infty, 0)$, posto $A := U \cup \mathbb{N}$ si ha che $A \in \tau$ e $U = A \cap (-\infty, 0) \in \tau'$. Ciò prova che $\tau_d \subset \tau'$ e quindi che $\tau' = \tau_d$.

5. Sia $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ tale che $f(x) = x + 1$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathbb{N}) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{N}\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } x + 1 = n\} \\ &= \{n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \cup \{-1\}. \end{aligned}$$

Ora, per ogni $A \in \tau$ si ha che $\mathbb{N} \subset A$, da cui $\mathbb{N} \subset f^{-1}(\mathbb{N}) \subset f^{-1}(A)$. Pertanto anche $f^{-1}(A) \in \tau$. In definitiva, poichè anche $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$, resta che la controimmagine mefiante f di ogni aperto di $(\mathbb{R}, \tau)$ è aperta in $(\mathbb{R}, \tau)$, ossia che f è continua.

$\square$

ESERCIZIO (21/9/2017)
Si ponga

$$\tau = \{A \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in A \ \exists \varepsilon > 0 \ t.c. \ (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cup \{0\} \subset A\} \ .$$

1. Provare che τ è una topologia su $\mathbb{R}$.
2. Determinare $Int[1, 2]$, $Int[0, 1]$, $Int[-1, +\infty]$ rispetto a τ.
3. Determinare tutti i punti $x \in \mathbb{R}$ per cui $\{x\}$ è chiuso rispetto a τ.
4. Stabilire se $\mathbb{R}$ è compatto rispetto a τ.
5. Dimostrare che la topologia indotta da τ su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è strettamente meno fine di quella indotta dalla topologia Euclidea τ_0 sullo stesso insieme.
6. Sia $f : (\mathbb{R}, \tau_0) \to (\mathbb{R}, \tau_0)$ una funzione continua tale che $f(0) = 0$. Provare che la stessa funzione è continua considerata come $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$.

Svolgimento. 1. Proviamo che τ è una topologia su $\mathbb{R}$ verificando che sono soddisfatti gli assiomi della definizione di topologia.

(i) $\emptyset \in \tau$ poichè, non avendo elementi, verifica automaticamente la condizione che definisce gli elementi di τ.
$\mathbb{R} \in \tau$ in quanto $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall \varepsilon > 0$ risulta che $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$.

(ii) Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia di elementi di τ e sia $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Allora esiste $j \in I$ tale che $x \in A_j \in \tau$, per cui esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cup \{0\} \subset A_j \subset \bigcup_{i \in I} A_i \ .$$

Dunque per ogni $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cup \{0\} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, cioè $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

(iii) Siano $A_1, A_2 \in \tau$ e sia $x \in A_1 \cap A_2$. Allora

$$x \in A_1 \Rightarrow \exists \varepsilon_1 > 0 \text{ t.c. } (x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \cup \{0\} \subset A_1 \ ,$$

$$x \in A_2 \Rightarrow \exists \varepsilon_2 > 0 \text{ t.c. } (x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \cup \{0\} \subset A_2 \ .$$

Quindi, detto $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, si ha che

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cup \{0\} = [(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1) \cap (x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2)] \cup \{0\} \subset A_1 \cap A_2 \ .$$

In definitiva, per ogni $x \in A_1 \cap A_2$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cup \{0\} \subset A_1 \cap A_2$, cioè $A_1 \cap A_2 \in \tau$.

Dunque, a norma di definizione, τ è una topologia su $\mathbb{R}$.

Prima di procedere osserviamo quanto segue. Detta τ_0 la topologia Euclidea su $\mathbb{R}$, è noto che

$$A \in \tau_0 \ \Leftrightarrow \ \forall x \in A \ \exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. } (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A.$$

Quindi, dalla definizione di τ, si vede immediatamente che gli aperti (non vuoti) rispetto a τ sono tutti e soli gli aperti di τ_0 contenenti 0.
In particolare, se $A \in \tau$ è un aperto non vuoto, dovendo essere $0 \in A$, per definizione di τ deve esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset A$.

2.

- $Int[1,2] = \emptyset$ in quanto, se così non fosse, essendo aperto, $Int[1,2]$ conterrebbe 0, ma ciò è impossibile in quanto $Int[1,2] \subset [1,2]$.
- $Int[0,1] = \emptyset$ in quanto, per quanto osservato sopra, gli aperti di τ devono sempre contenere un intorno sferico di 0, il che in questo caso non è possibile in quanto per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che $(-\varepsilon, \varepsilon) \not\subset [0,1]$, e a maggior ragione $(-\varepsilon, \varepsilon) \not\subset Int[0,1] \subset [0,1]$.
- $Int[-1,+\infty) = (-1,+\infty)$. Infatti, essendo un aperto della topologia Euclidea contenente 0, $(-1,+\infty) \in \tau$. Inoltre $(-1,+\infty)$ è il più grande aperto contenuto in $[-1,+\infty)$ perchè, se anche $-1 \in Int[-1,+\infty) \in \tau$, allora esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che $(-1-\varepsilon, -1+\varepsilon) \subset Int[-1,+\infty) \subset [-1,+\infty)$, il che è assurdo.

3. Sia $x \in \mathbb{R}$: $\{x\}$ è chiuso rispetto a τ se e solo se $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ è aperto in τ. Ma, per quanto osservato in precedenza, $\mathbb{R} \setminus \{x\} \in \tau$ se e solo se $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ è un aperto di τ_0 contenente 0. Ora, poichè $(\mathbb{R}, \tau_0)$ è uno spazio T_1, per ogni $x \in \mathbb{R}$ $\{x\}$ è chiuso in rispetto a τ_0, e quindi $\mathbb{R} \setminus \{x\} \in \tau_0$. Ne consegue che $\{x\}$ è chiuso rispetto a τ se e solo se $0 \in \mathbb{R} \setminus \{x\}$, cioè se e solo se $x \neq 0$.

4. $\mathbb{R}$ non è compatto rispetto a τ. Per verificarlo, per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ si consideri $A_n := (-n, n)$: A_n è un aperto della topologia Euclidea contenente 0, quindi $A_n \in \tau$; inoltre è chiaro che $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{R}$. Pertanto $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ è un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$ rispetto a τ. Tuttavia esso non ammette

sottoricoprimenti finiti in quanto comunque se ne estrae una sottofamiglia finita $\{A_{n_1}, \ldots, A_{n_k}\}$, detto $m := \max\{n_1, \ldots, n_k\}$, si ha che

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_{n_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (-n_i, n_i) = (-m, m) \subsetneqq \mathbb{R} ,$$

cioè non si ottine più un ricoprimento di $\mathbb{R}$.

5. Sia $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e denotiamo con τ' la topologia indotta da τ su $\mathbb{R}^*$ e con τ_0' la topologia indotta da τ_0 su $\mathbb{R}^*$. Vogliamo provare che $\tau' \subsetneqq \tau_0'$.
Avendo osservato che gli aperti di τ sono gli aperti di τ_0 conteneti 0, abbiamo che $\tau \subset \tau_0$; quindi, passando alle topologie indotte, resta provato che $\tau' \subset \tau_0'$.
Per provare che non vale l'uguaglianza è sufficiente mostrare che esiste almeno un elemento di τ_0' che non appartiene a τ'. Si consideri, ad esempio, $U := (1, 2)$: poichè $U \in \tau_0$ e $U \subset \mathbb{R}^*$, si ha che $U \in \tau_0'$. Ma $U \notin \tau'$ perchè, se così non fosse, allora esisterebbe $A \in \tau$ tale che

$$U = (1, 2) = \mathbb{R}^* \cap A = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap A .$$

Segue che $A = (1, 2) \cup \{0\} \in \tau$, il che è assurdo in quanto abbiamo precedentemente osservato che gli aperti di τ devono necessariamente contenere un intorno sferico di 0, e ciò non è vero per A.

6. Sia $f : (\mathbb{R}, \tau_0) \to (\mathbb{R}, \tau_0)$ una funzione continua tale che $f(0) = 0$. Proviamo che $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ è continua provando che la contoimmagine mediante f di ogni aperto di τ è aperta in τ.
Ovviamente $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$. Sia dunque $A \in \tau$: per quanto osservato inizialmente, $A \in \tau_0$ e $0 \in A$. Allora dalla continuità di f rispetto alle topologie Euclidee segue che $f^{-1}(A) \in \tau_0$; mentre $f(0) = 0$ implica che $0 \in f^{-1}(\{0\}) \subset f^{-1}(A)$. Pertanto $f^{-1}(A) \in \tau_0$ e $0 \in f^{-1}(A)$, cioè $f^{-1}(A) \in \tau$.
In definitiva abbiamo provato che per ogni $A \in \tau$ $f^{-1}(A) \in \tau$, e quindi $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ è continua.

$\square$

ESERCIZIO (14/11/2017)
Si ponga

$$\mathfrak{B} = \{(-\infty, a) \mid a < 0\} \cup \{[0, a] \mid a > 0\} .$$

1. *Provare che* $\mathfrak{B}$ *è base di una topologia* τ *su* $\mathbb{R}$.
2. *Determinare* $Int(-\infty, 0]$, $Int[-3, 3]$, $Int(0, 1)$ *rispetto a* τ.
3. *Stabilire se* $\mathbb{R}$ *è connesso rispetto a* τ.
4. *Dimostrare che la topologia indotta da* τ *si* $(-\infty, 0)$ *è strettamente meno*

fine di quella indotta dalla topologia Euclidea τ_0 sullo stesso insieme.
5. Provare che la funzione $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ definita da $f(x) = x^3$ è continua. Stabilire se si tratta di un omeomorfismo.
6. Provare che la funzione $g : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ definita da $f(x) = x^2$ non è continua.

Svolgimento. 1. Proviamo che $\mathfrak{B}$ è base di una topologia su $\mathbb{R}$ verificando che sono soddisfatte le ipotesi del *Teorema di esistenza e unicità della topologia generata da una base.*

(i) $\bigcup_{B\in\mathfrak{B}} B = \mathbb{R}$. Infatti:

$$\bigcup_{B\in\mathfrak{B}} B = \bigcup_{a<0}(-\infty, a) \cup \bigcup_{a>0}[0, a] = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R} \ .$$

(ii) Occorre provare che

$$\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B} \text{ t.c. } B_1 \cap B_2 \neq \emptyset,\ \forall x \in B_1 \cap B_2\ \exists B_x \in \mathfrak{B} \text{ t.c. } x \in B_x \subset B_1 \cap B_2 \ .$$

Siano dunque $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ tali che $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Allora si presentano le seguenti due possibilità:
(I) $B_1 = (-\infty, a)$, $B_2 = (-\infty, b)$, con $a, b < 0$. In tal caso, supponendo $a \leq b$, risulta che $B_1 \cap B_2 = B_1 \in \mathfrak{B}$. Quindi per ogni $x \in B_1 \cap B_2$ basta scegliere $B_x = B_1$.
(II) $B_1 = [0, a]$, $B_2 = [0, b]$. Come nel caso (I), supponendo $a \leq b$, per ogni $x \in B_1 \cap B_2$, basta scegliere $B_x = B_1 = B_1 \cap B_2$.

Dunque, essendo verificate tutte le ipotesi del Teorema, $\mathfrak{B}$ è base di un'unica topologia τ su $\mathbb{R}$. Inoltre, per ogni $A \subset \mathbb{R}$ si ha che

$$A \in \tau \ \Leftrightarrow\ \forall x \in A\ \exists B \in \mathfrak{B} \text{ t.c. } x \in B \subset A.$$

2.

- $Int(-\infty, 0] = (-\infty, 0)$. Infatti $(-\infty, 0) = \bigcup_{a<0}(-\infty, a) \in \tau$ perchè unione di elementi di $\mathfrak{B}$. Inoltre $(-\infty, 0)$ è il più grande aperto contenuto in $(-\infty, 0]$ in quanto, se per assurdo $0 \in Int(-\infty, 0]$, allora esisterebbe $B \in \mathfrak{B}$ tale che $0 \in B \subset Int(-\infty, 0] \subset (-\infty, 0]$ il che è impossibile in quanto gli unici elementi di $\mathfrak{B}$ contenenti 0 sono del tipo $[0, a]$, con $a > 0$, e $[0, a] \not\subset (-\infty, 0]$.

- $Int[-3, 3] = [0, 3]$. Infatti $[0, 3] \in \mathfrak{B} \subset \tau$ è un aperto contenuto in $[-3, 3]$ ed è il più grande aperto contenuto in $[-3, 3]$. Infatti, se esistesse $x \in [-3, 0) \cap Int[-3, 3]$, allora esisterebbe $B \in \mathfrak{B}$ tale che $x \in B \subset [-3, 3]$, il che è impossibile in quanto tutti gli elementi della base che contengono numeri negativi sono illimitati inferiormente.

- $Int(0,1) = \emptyset$ in quanto non esistono elementi della base, e a maggior ragione aperti di τ, contenuti in $(0,1)$. Infatti tutti gli elementi di $\mathfrak{B}$ che contengono numeri positivi contengono anche 0.

3. $\mathbb{R}$ non è connesso rispetto a τ perchè $\mathbb{R}$ si può scrivere come unione disgiunta di aperti. Infatti $\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty)$, ove

$$(-\infty, 0) = \bigcup_{a<0} (-\infty, a) \in \tau \quad \text{e} \quad [0, +\infty) = \bigcup_{a>0} [0, a] \in \tau$$

perchè unione di elementi della base $\mathfrak{B}$.

4. Siano τ' la topologia indotta da τ su $(-\infty, 0)$ e τ_0' la topologia indotta dalla topologia Euclidea τ_0 su $(-\infty, 0)$. Vogliamo provare che $\tau' \subsetneqq \tau_0'$.
A tal fine osserviamo che

$$\mathfrak{B}' = \{(-\infty, 0) \cap B \mid B \in \mathfrak{B}\} = \{(-\infty, a) \mid a < 0\}$$

è base di τ'; inoltre, poichè per ogni $a < 0$ $(-\infty, a) \in \tau_0$ e $(-\infty, a) \subset (-\infty, 0)$, risulta che $\mathfrak{B}' \subset \tau_0'$. Segue che $\tau' \subset \tau_0'$ in quanto ogni elemento di τ' si scrive come unione di elementi di $\mathfrak{B}'$.
Per provare che non vale l'ugualglianza si consideri $U = (-1, 0)$: $U \in \tau_0$ e $U \subset (-\infty, 0)$, quindi $U \in \tau_0'$. Ma $U \notin \tau'$ in quanto non si può scrivere come unione di elementi di $\mathfrak{B}'$, i quali sono tutti intervalli illimitati inferiormente.

5. Sia $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ tale che $f(x) = x^3$. Poichè la controimmagine dell'unione è sempre uguale all'unione delle controimmagini e ogni aperto si scrive come unione di elementi di $\mathfrak{B}$, per provare che f è continua è sufficiente provare che $f^{-1}(B) \in \tau$ per ogni $B \in \mathfrak{B}$. Distinguiamo due casi:

(I) se $B = (-\infty, a)$, con $a < 0$, allora

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = x^3 < a\} = (-\infty, \sqrt[3]{a}) \in \mathfrak{B} \subset \tau$$

essendo $\sqrt[3]{a} < 0$;
(II) se $B = [0, a]$, con $a > 0$, allora

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = x^3 \in [0, a]\} = [0, \sqrt[3]{a}] \in \mathfrak{B} \subset \tau$$

essendo $\sqrt[3]{a} > 0$.

Dunque, effettivamente, f è continua. Inoltre f è bigettiva, con inversa $f^{-1} : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ tale che $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Per mostrare che f è un omeomorfismo basta mostrare che f^{-1} è continua o, equivalentemente, che f è aperta. Anche in questo caso, poichè l'immagine dell'unione è sempre uguale all'unione delle immagini e ogni aperto si scrive come unione degli elementi della base, è sufficiente provare che $f(B) \in \tau$ per ogni $B \in \mathfrak{B}$. Distinguiamo due casi:

(I) se $B = (-\infty, a)$, con $a < 0$, allora
$$f(B) = \{f(x) = x^3 \mid x \in (-\infty, a)\} = (-\infty, a^3) \in \mathfrak{B} \subset \tau$$
essendo $a^3 < 0$;
(II)se $B = [0, a]$, con $a > 0$, allora
$$f(B) = \{f(x) = x^3 \mid x \in [0, a]\} = [0, a^3] \in \mathfrak{B} \subset \tau$$
essendo $a^3 > 0$.

Dunque, essendo continua, bigettiva e aperta, f è un omeomorfismo.

6. Per mostrare che la funzione $g : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ definita da $g(x) = x^2$ non è continua, si consideri $A = [0, 9]$: $A \in \mathfrak{B} \subset \tau$, ma
$$g^{-1}(A) = g^{-1}([0, 9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x^2 \leq 9\} = [-3, 3] \notin \tau$$
in quanto al punto 2. abbiamo provato che $Int[-3, 3] \neq [-3, 3]$.
Dunque, abbiamo che esiste un aperto in τ la cui controimmagine mediante g non è aperta in τ, e ciò è sufficiente per dire che g non è continua.

<u>NOTA</u>: Lo stesso ragionamento vale per ogni intervallo $A = [0, a]$ (con $a > 0$). Infatti $g^{-1}(A) = [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$, che non è aperto in τ in quanto per ogni $x \in [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$, con $x < 0$, non esistono elementi $B \in \mathfrak{B}$ tali che $x \in B \subset [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$.

$\square$

ESERCIZIO (11/4/2018)
Si ponga
$$\tau = \{A \in \tau_0 \mid 1 \in A \wedge 0 \notin A\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$$
dove τ_0 è la topologia Euclidea di $\mathbb{R}$.

1. Provare che τ è una topologia su $\mathbb{R}$.
2. Determinare $Int[0, 1]$, $Int(-\infty, 3]$, $Int\mathbb{Q}$ rispetto a τ.
3. Stabilire se $(\mathbb{R}, \tau)$ è uno spazio T_2.
4. Stabilire se $\mathbb{R}$ è connesso rispetto a τ.
5. Sia $f : (\mathbb{R}, \tau_0) \to (\mathbb{R}, \tau_0)$ una funzione continua tale che $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Provare che la stessa funzione vista come $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ è continua.

Svolgimento. 1. Proviamo che τ è una topologia su $\mathbb{R}$ verificando che sono soddisfatti tutti gli assiomi della definizione di topologia.

(i) $\emptyset, \mathbb{R} \in \tau$ per costruzione.

(ii) Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di elementi di τ. Se tutti gli A_i sono vuoti, allora $\bigcup_{i\in I} A_i = \emptyset \in \tau$; se almeno uno degli A_i coincide con $\mathbb{R}$, allora $\bigcup_{i\in I} A_i = \mathbb{R} \in \tau$. Dunque possiamo assumere che per ogni $i \in I$ $A_i \neq \mathbb{R}$ ed esiste $j \in I$ tale che $A_j \neq \emptyset$. Allora $1 \in A_j$ e $0 \notin A_i$ per ogni $i \in I$, da cui $1 \in (\bigcup_{i\in I} A_i) \wedge 0 \notin (\bigcup_{i\in I} A_i)$. Infine, poichè $A_i \in \tau_0$ per ogni $i \in I$, $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau_0$, essendo τ_0 una topologia. In definitiva $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$.

(iii) Siano $A_1, A_2 \in \tau$. Se uno dei due è vuoto, allora $A_1 \cap A_2 = \emptyset \in \tau$; se uno dei due coincide con $\mathbb{R}$, allora $A_1 \cap A_2 = A_i \in \tau$ (con $i \in \{1, 2\}$). Supponiamo quindi che $A_1, A_2 \in \tau \setminus \{\mathbb{R}, \emptyset\}$: in tal caso $A_1, A_2 \in \tau_0$, $1 \in A_1 \wedge 0 \notin A_1$ e $1 \in A_2 \wedge 0 \notin A_2$. Quindi $A_1 \cap A_2 \in \tau_0$ (perchè τ_0 è una topologia) e $1 \in (A_1 \cap A_2) \wedge 0 \notin (A_1 \cap A_2)$. Dunque $A_1 \cap A_2 \in \tau$.

Dunque, a norma di definizione, τ è una topologia su $\mathbb{R}$.

Prima di proseguire osserviamo che dalla definizione di τ segue immediatamente che τ è meno fine di τ_0, cioè $\tau \subset \tau_0$.

2.

- $Int[0, 1] = \emptyset$. Infatti, dovendo essere aperto riapetto alla topologia Euclidea, $Int[0, 1] \subset (0, 1)$. Da ciò segue che $1 \notin Int[0, 1] \in \tau$, per cui necessariamente $Int[0, 1] = \emptyset$.

- $Int(-\infty, 3] = (-\infty, 0) \cup (0, 3)$. Infatti $(-\infty, 0) \cup (0, 3) \in \tau$ e $1 \in (-\infty, 0) \cup (0, 3)$ mentre $0 \notin (-\infty, 0) \cup (0, 3)$. Pertanto $(-\infty, 0) \cup (0, 3) \in \tau$ è un aperto contenuto in $(\infty, 3]$. In realtà esso è il più grande aperto contenuto in $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$ in quanto, poichè $Int(-\infty, 3]$ deve essere aperto, 0 non può appartenervi e lo stesso dicasi per 3, il quale, non essendo interno rispetto a τ_0, non può esserlo nemmeno rispetto a τ.

- $Int\mathbb{Q} = \emptyset$ in quanto $\mathbb{Q}$ ha interno vuoto tispetto alla topologa euclidea. Pertanto, poichè $\mathbb{Q}$ non contiene aperti non vuoti di τ_0, a maggior ragione non contiene aperti non vuoti di τ.

3. $(\mathbb{R}, \tau)$ non è uno spazio T_2 in quanto tutti gli aperti non vuoti di τ contengono 1. Pertanto, comunque si considerano due punti distiniti di $\mathbb{R}$, non è possibile separarli con due intorni disgiunti in quanto ogni intorno, contenendo un aperto, contiene 1.

4. $(\mathbb{R}, \tau)$ è connesso.

<u>1° MODO</u>: Poichè tutti gli aperti di τ contengono 1, $\mathbb{R}$ non si può scrivere come unione disgiunta di aperti.

<u>2° MODO</u>: Se $A \in \tau \setminus \{\mathbb{R}, \emptyset\}$, allora $1 \in A$ e $0 \notin A$. Quindi $1 \notin A^C$ e $0 \in A^C$, da cui segue che A^C non può essere aperto. Dunque $\mathbb{R}$ è connesso rispetto a τ perchè gli unici insiemi contemporaneamente aperti e chiusi sono $\mathbb{R}$ e $\emptyset$.

<u>3° MODO</u>: Poichè τ è meno fine di τ_0 e $(\mathbb{R}, \tau_0)$ è connesso, allora anche $(\mathbb{R}, \tau)$ deve esserlo.

5. Sia $f : (\mathbb{R}, \tau_0) \to (\mathbb{R}, \tau_0)$ una funzione continua tale che $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Per provare che la stessa funzione vista come $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ è continua, proviamo che $f^{-1}(A) \in \tau$ per ogni $A \in \tau$.
Certamente $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \in \tau$ e $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$. Sia dunque $A \in \tau \setminus \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, cioè $A \in \tau_0$ tale che $1 \in A \wedge 0 \notin A$. Poichè f è continua rispetto alle topologie Euclidee, $f^{-1}(A) \in \tau_0$; inoltre da $f(1) = 1 \in A$ segue che $1 \in f^{-1}(A)$ e da $f(0) = 0 \notin A$ segue che $0 \notin f^{-1}(A)$. Pertanto $f^{-1}(A) \in \tau$.

$\square$

ESERCIZIO (7/6/2018)

Si ponga

$$\mathfrak{B} = \{\{x\} \mid x < 0\} \cup \{[0, 1]\} \cup \{\{x\} \mid x > 1\} \ .$$

1. Provare che $\mathfrak{B}$ è base di una topologia su $\mathbb{R}$, denotata con τ.
2. Determinare $Int(0, 1)$, $Int(0, 2]$, $Int\mathbb{Z}$ rispetto a τ.
3. Determinare $\overline{\{0\}}$ rispetto a τ.
4. Stabilire se $\mathbb{R}$ è connesso rispetto a τ.
5. Provare che la funzione $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \leq 1 \\ 2 & se\ x > 1 \end{cases}$$

è continua.

Svolgimento. 1. Proviamo che $\mathfrak{B}$ è base di una topologia su $\mathbb{R}$ verificando che sono soddisfatte le ipotesi del *Teorema di esistenza e unicità della topologia generata da una base.*

(i) $\bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B = \mathbb{R}$. Infatti:

$$\bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B = \bigcup_{x<0} \{x\} \cup [0, 1] \cup \bigcup_{x>1} \{x\} = (-\infty, 0) \cup [0, 1] \cup (1, +\infty) = \mathbb{R}.$$

(ii) Occorre provare che

$$\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B} \text{ t.c. } B_1 \cap B_2 \neq \emptyset,\ \forall x \in B_1 \cap B_2\ \exists B_x \in \mathfrak{B} \text{ t.c. } x \in B_x \subset B_1 \cap B_2\ .$$

Ma nel nostro caso tale condizione è automaticamente vera in quanto non esistono elementi di $\mathfrak{B}$ aventi intersezione non vuota.

Dunque, essendo verificate tutte le ipotesi del Teorema, $\mathfrak{B}$ è base di un'unica topologia τ su $\mathbb{R}$. Inoltre, per ogni $A \subset \mathbb{R}$ si ha che

$$A \in \tau \;\Leftrightarrow\; \forall x \in A \;\exists B \in \mathfrak{B} \text{ t.c. } x \in B \subset A.$$

2.

- $Int(0,1) = \emptyset$ in quanto non vi sono elementi della base, e a maggior ragione aperti non vuoti, contenuti in $(0,1)$.
- $Int(0,2] = (1,2]$. Infatti $x \in Int(0,2]$ se e solo se esiste $B \in \mathfrak{B}$ tale che $x \in B \subset (0,2]$ e ciò è vero se e solo se $x \in (1,2]$. Infatti, se $x \in (1,2]$ allora basta scegliere $B = \{x\} \in \mathfrak{B}$; altrimenti, se $x \in (0,1]$ allora l'unico elemento di $\mathfrak{B}$ contenete x è $[0,1]$, ma $[0,1] \not\subset (0,2]$, quindi $x \notin Int(0,2]$.
- $Int\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$. Infatti, poichè si può scrivere come unione di elementi di $\mathfrak{B}$, $\mathbb{Z}\setminus\{0,1\}$ è un aperto contenuto in $\mathbb{Z}$. Quindi $\mathbb{Z}\setminus\{0,1\} \subset Int\mathbb{Z}$. In realtà vale l'uguaglianza in quanto 0 e 1 non sono punti interni a $\mathbb{Z}$ dalto che l'unico elemento di $\mathfrak{B}$ contenente 0e 1 è $[0,1]$, ma $[0,1] \not\subset \mathbb{Z}$.

3. Ricordiamo che $\overline{\{0\}} = \mathbb{R} \setminus (Int(\mathbb{R} \setminus \{0\}))$. Ora, $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e, ragionando in modo analogo a quanto visto nel punto 2. si prova che $Int(\mathbb{R}^*) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. Pertanto

$$\overline{\{x\}} = \mathbb{R} \setminus (Int\mathbb{R}^*) = \mathbb{R} \setminus [(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)] = [0,1] \ .$$

4. $\mathbb{R}$ non è connesso rispetto a τ in quanto $[0,1]$ è un sottoinsieme proprio (e non vuoto) di $\mathbb{R}$ contemporaneamente aperto e chiuso. Infatti $[0,1] \in \mathfrak{B} \subset \tau$ e il suo complementare

$$\mathbb{R} \setminus [0,1] = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) = \bigcup_{x<0} \{x\} \cup \bigcup_{x>1} \{x\}$$

è aperto rispetto a τ perchè unione di elementi della base $\mathfrak{B}$.

5. Poichè la controimmagine dell'unione è uguale all'unione delle controimmagini e ogni aperto $A \in \tau$ è unione di elementi di $\mathfrak{B}$, per provare che f è continua è sufficiente provare che per ogni $B \in \mathfrak{B}$ $f^{-1}(B) \in \tau$. Distinguiamo i seguenti casi:

(I) se $B = \{x\}$, con $x < 0$, allora $f^{-1}(B) = \{y \in \mathbb{R} \mid f(y) = x\} = \emptyset \in \tau$;

(II) se $B = \{x\}$, con $x > 1$ e $x \neq 2$, allora $f^{-1}(B) = \emptyset \in \tau$;
(III) se $B = \{2\}$, allora $f^{-1}(\{2\}) = (1, +\infty) = \bigcup_{x>1}\{x\} \in \tau$;
(IV) se $B = [0, 1]$, allora $f^{-1}([0, 1]) = (-\infty, 1] = \bigcup_{x<0}\{x\} \cup [0, 1] \in \tau$.

$\square$

ESERCIZIO (5/9/2018)

Si ponga

$$\mathfrak{B} = \{K \subset \mathbb{R} \mid \forall x, y \in K\ x + y \in K\}.$$

1. Provare che $\mathfrak{B}$ è base di una topologia su $\mathbb{R}$, denotata con τ.
2. Determinare $Int(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $Int[0, 1)$, $Int(-3, +\infty)$ rispetto a τ.
3. Stabilire se $\mathbb{R}$ è compatto rispetto a τ.
4. Stabilire se $\mathbb{R}$ è connesso rispetto a τ.
5. Dimostrare che la funzione $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ definita da $f(x) = 3x$ è continua.

Svolgimento. 1. Proviamo che $\mathfrak{B}$ è base di una topologia su $\mathbb{R}$ mostrando che sono soddisfatte le ipotesi del *Teorema di esistenza e unicità della topologia generata da una base.*

(i) $\bigcup_{K\in\mathfrak{B}} = \mathbb{R}$ in quanto ovviamente $\mathbb{R} \in \mathfrak{B}$.

(ii) Occorre provare che

$$\forall K_1, K_2 \in \mathfrak{B} \text{ t.c. } K_1 \cap K_2 \neq \emptyset,\ \forall x \in K_1 \cap K_2\ \exists K_x \in \mathfrak{B} \text{ t.c. } x \in K_x \subset K_1 \cap K_2\ .$$

Siano dunque $K_1, K_2 \in \mathfrak{B}$ tali che $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Osserviamo che $K_1 \cap K_2 \in \mathfrak{B}$. Infatti per ogni $x, y \in K_1 \cap K_2$, $x, y \in K_i$ $\forall i = 1, 2$, quindi $x + y \in K_i$ $\forall i = 1, 2$, cioè $x + y \in K_1 \cap K_2$.
Pertanto, per ogni $x \in K_1 \cap K_2$ basta scegliere $K_x = K_1 \cap K_2$.

Dunque, essendo verificate tutte le ipotesi del Teorema, $\mathfrak{B}$ è base di un'unica topologia τ su $\mathbb{R}$. Inoltre, per ogni $A \subset \mathbb{R}$ si ha che

$$A \in \tau \;\Leftrightarrow\; \forall x \in A\ \exists B \in \mathfrak{B} \text{ t.c. } x \in B \subset A.$$

Prima di procedere, facciamo qualche considerazione sugli elementi della base $\mathfrak{B}$.
Certamente $\{0\} \in \mathfrak{B}$. Inoltre osserviamo che, se $K \in \mathfrak{B}$ e K contiene almeno un elemento strettamente positivo, allora K è illimitato superiormente. Infatti, se $x \in K$ e $x > 0$, allora anche $x + x = 2x \in K$ e, ragionando per induzione, si deduce che $nx \in K$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$. Analogamente, se $K \in \mathfrak{B}$ e K contiene almeno un elemento strettamente negativo, allora K è illimitato inferiormente.

2.

- $Int(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in quanto $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \in \tau$ perchè unione di elementi di $\mathfrak{B}$. Infatti $(-\infty, 0), (0, +\infty) \in \mathfrak{B}$ in quanto la somma di due numeri strettamente positivi (risp. negativi) è strettamente positiva (risp. negativa).

- $Int[0, 1) = \{0\}$. Infatti $\{0\}$ è un aperto contenuto in $[0, 1)$, quindi $\{0\} \subset Int[0, 1)$. In realtà vale l'uguaglianza in quanto, se $x \in (0, 1)$ fosse punto interno, allora esisterebbe $K \in \mathfrak{B}$ tale che $x \in K \subset [0, 1)$, il che è impossibile perchè x è strettamente positivo e quindi, per quanto osservato prima, K sarebbe illimitato superiormente.

- $Int(-3, +\infty) = [0, +\infty)$. Infatti $[0, +\infty) \in \mathfrak{B} \subset \tau$ è un aperto contenuto in $(-\infty, 0)$, per cui $[0, +\infty) \subset Int(-3, +\infty)$. In realtà vale l'uguaglianza in quanto, se $x \in (-3, 0)$ fosse punto interno, allora esisterebbe $K \in \mathfrak{B}$ tale che $x \in K \subset (-3, +\infty)$, il che è impossibile perchè x è strettamente negativo e quindi, per quanto osservato prima, K sarebbe illimitato inferiormente.

3. $\mathbb{R}$ non è compatto rispetto a τ. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si consideri

$$\mathbb{N}x := \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Chiaramente $\mathbb{N}x \in \mathfrak{B}$ (in quanto $\forall n, m \in \mathbb{N}\ nx + mx = (n + m)x \in \mathbb{N}x$, essendo $n+m \in \mathbb{N}$) e $x = 1x \in \mathbb{N}x$. Pertanto $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{N}x = \mathbb{R}$, cioè $\{\mathbb{N}x\}_{x \in \mathbb{R}}$ è un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$. Tuttavia questo non ammette sottoricoprimento finito in quanto, comunque si sceglie una sottofamiglia finita $\{A_{x_1}, \ldots, A_{x_k}\}$, poichè ogni A_{x_i} è numerabile e l'unione finita di insiemi numerabili e numerabile, risulta che $\bigcup_{i=1}^{k} A_{x_i}$ è numerabile e quindi non può essere uguale ad $\mathbb{R}$.

4. $\mathbb{R}$ non è connesso rispetto a τ in quanto $\mathbb{R}$ si può scrivere come unione disgiunta degli aperti non vuoti $(-\infty, 0)$ e $[0, +\infty)$ (che sono elementi di $\mathfrak{B}$).

5. Sia $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ tale che $f(x) = 3x$. Poichè la controimmagine dell'unione è sempre uguale all'unione delle controimmagini e ogni aperto di τ è unione di elementi di $\mathfrak{B}$, per provare che f è continua è sufficiente mostrare che $f^{-1}(K) \in \tau$ per ogni $K \in \mathfrak{B}$.
Sia dunque $K \in \mathfrak{B}$. Allora per ogni $x, y \in K\ x + y \in K$. Consideriamo

$$f^{-1}(K) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in K\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x \in K\}$$

e siano $x, y \in f^{-1}(K)$. Allora $3x, 3y \in K$ e quindi $3(x+y) = 3x+3y \in K$, da cui segue che $x+y \in f^{-1}(K)$. Pertanto, data l'arbitrarietà di $x, y \in f^{-1}(K)$, si ha che $f^{-1}(K) \in \mathfrak{B} \subset \tau$.

$\square$

ESERCIZIO (20/9/2018)
Si ponga
$$\mathfrak{B} = \{[a,b] \mid a < b \text{ e } a,b \in \mathbb{Q}\} \cup \{\{x\} \mid x \in \mathbb{Q}\}.$$

1. Provare che $\mathfrak{B}$ è base di una topologia su $\mathbb{R}$, denotata con τ.
2. Determinare $Int[\sqrt{2},\sqrt{3}]$, $Int[0,1)$, $Int[\pi,+\infty)$ rispetto a τ.
3. Stabilire se $(\mathbb{R},\tau)$ è uno spazio T_2.
4. Stabilire se $\mathbb{R}$ è compatto rispetto a τ.
5. Stabilire se $\mathbb{R}$ è connesso rispetto a τ.
6. Dimostrare che la funzione $f : (\mathbb{R},\tau) \to (\mathbb{R},\tau)$ definita da $f(x) = 2x$ è continua.

Svolgimento. 1. Proviamo che $\mathfrak{B}$ è base di una topologia su $\mathbb{R}$ mostrando che sono soddisfatte le ipotesi del *Teorema di esistenza e unicità della topologia generata da una base.*

(i) $\bigcup_{B\in\mathfrak{B}} B = \mathbb{R}$. Infatti, l'inclusione $\subset$ è ovvia. Viceversa, se $x \in \mathbb{R}$ e in particolare $x \in \mathbb{Q}$ allora $x \in \{x\} \in \mathfrak{B}$; altrimenti, se $x \notin \mathbb{Q}$, allora esistono $a, b \in \mathbb{Q}$, con $a < b$ tali che $x \in [a,b] \in \mathfrak{B}$ (basta scegliere $a, b \in \mathbb{N}$ tali che $a < x < b$).

(ii) Occorre provare che

$$\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B} \text{ t.c. } B_1 \cap B_2 \neq \emptyset,\ \forall x \in B_1 \cap B_2\ \exists B_x \in \mathfrak{B} \text{ t.c. } x \in B_x \subset B_1 \cap B_2\ .$$

Siano dunque $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ tali che $B_1 \cap B_1 \neq \emptyset$ e distinguamo i seguenti casi:
(I) Se $B_1 = [a,b]$ e $B_2 = [c,d]$, con $a,b,c,d \in \mathbb{Q}$, allora $B_1 \cap B_2 = [p,q]$ con $p, q \in \{a,b,c,d\}$. Pertanto $B_1 \cap B_2 \in \mathfrak{B}$ e quindi, per ogni $x \in B_1 \cap B_2$ basta scegliere $B_x = B_1 \cap B_2$.
(II) Se $B_1 = \{x\}$, con $x \in \mathbb{Q}$, e $B_2 = [a,b]$, con $a,b \in \mathbb{Q}$, allora $B_1 \cap B_2 = B_1 = \{x\} \in \mathfrak{B}$. Pertanto basta scegliere $B_x = B_1$.

Dunque, essendo verificate tutte le ipotesi del Teorema, $\mathfrak{B}$ è base di un'unica topologia τ su $\mathbb{R}$. Inoltre, per ogni $A \subset \mathbb{R}$ si ha che

$$A \in \tau \ \Leftrightarrow\ \forall x \in A\ \exists B \in \mathfrak{B} \text{ t.c. } x \in B \subset A.$$

2.

- $Int[\sqrt{2},\sqrt{3}] = (\sqrt{2},\sqrt{3})$. Infatti, per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, per ogni $x \in (\sqrt{2},\sqrt{3})$, esistono $a, b \in \mathbb{Q}$ tali che $x \in [a,b] \subset (\sqrt{2},\sqrt{3})$. Quindi $(\sqrt{2},\sqrt{3}) \subset Int[\sqrt{2},\sqrt{3}]$. Ma in realtà vale l'uguaglianza in quanto $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ non sono punti interni a $[\sqrt{2},\sqrt{3}]$. Infatti, se $\sqrt{2} \in Int[\sqrt{2},\sqrt{3}]$ allora esisterebbero $a, b \in \mathbb{Q}$ tali che $\sqrt{2} \in [a,b] \subset [\sqrt{2},\sqrt{3}]$, il che è assurdo, essendo $a < \sqrt{2}$. Analogamente si ragiona per $\sqrt{3}$.

- $Int[0,1) = [0,1)$ in quanto $[0,1)$ è aperto rispetto a τ perchè si può scrivere come unione di elementi di $\mathfrak{B}$. Infatti si verifica facilmente che
$$[0,1) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$$
- $Int[\pi, +\infty) = (\pi, +\infty)$: basta ragionare in modo del tutto analogo a quanto visto per $Int[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

3. $(\mathbb{R}, \tau)$ è uno spazio T_2. Infatti, per la densità di $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, con $x \neq y$ (ad esempio $x < y$), esistono $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ tali che $a < x < b < c < y < d$, per cui $[a,b], [c,d] \in \mathfrak{B}$ sono intorni aperti e disgiunti di x e y rispettivamente.

4. $\mathbb{R}$ non è compatto rispetto a τ. Ad esempio, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si consideri $A_n = [-n, n]$: $A_n \in \mathfrak{B} \subset \tau$ e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$. Quindi $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$, ma da questo non è possibile estrarre un sottoricoprimento finito. Infatti, comunque si sceglie una sottofamiglia finita $\{A_{n_i}\}_{i=1,\ldots,k}$, posto $\overline{n} = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$, si ha che
$$\bigcup_{i=1}^{k} A_{n_i} = \bigcup_{i=1}^{k} [-n_i, n_i] = [-\overline{n}, \overline{n}] \subsetneq \mathbb{R}.$$

5. $\mathbb{R}$ non è connesso rispetto a τ. Si consideri $A = [0,1)$: per quanto detto al punto 2, A è aperto. Inoltre A è anche chiuso rispetto a τ in quanto il suo complementare
$$\mathbb{R} \setminus A = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [-n, -\frac{1}{n}] \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [1, n]$$
è unione di elementi di $\mathfrak{B}$.
Quindi, poichè esiste un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, proprio e non vuoto, contemporaneamente aperto e chiuso, $\mathbb{R}$ è sconnesso.

6. Sia $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ tale che $f(x) = 2x$. Poichè la controimmagine dell'unione è uguale all'unione dlle controimmagini e ogni aperto è unione di elementi della base, per provare che f è continua è sufficiente provare che $f^{-1}(B) \in \tau$ per ogni $B \in \mathfrak{B}$. Distinguiamo due casi:

(I) se $B = \{x\}$ con $x \in \mathbb{Q}$, allora $f^{-1}(\{x\}) = \{\frac{x}{2}\}$. Poichè $\frac{x}{2} \in \mathbb{Q}$, $f^{-1}(\{x\}) \in \mathfrak{B} \subset \tau$.
(II) se $B = [a,b]$ con $a, b \in \mathbb{Q}$, allora $f^{-1}([a,b]) = [\frac{a}{2}, \frac{b}{2}]$; e poichè $\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \in \mathbb{Q}$, si ha che $f^{-1}([a,b]) \in \mathfrak{B} \subset \tau$.

Quindi, effettivamente f è continua. $\square$

ESERCIZIO (8/2/2019)
Si ponga

$$\mathfrak{B} = \{A \in \tau_0 \mid [0,1] \subset A\} \cup \{B \subset \mathbb{R} \mid B \subset (-\infty, 0)\} \ ,$$

dove τ_0 *è la topologia euclidea di* $\mathbb{R}$.

1. *Provare che* $\mathfrak{B}$ *è base di una topologia* τ *su* $\mathbb{R}$.
2. *Determinare* $Int[0,1]$, $Int[1,+\infty)$, $Int(-3,2]$ *rispetto a* τ.
3. *Stabilire se* $\mathbb{R}$ *è compatto rispetto a* τ.
4. *Verificare che la topologia indotta da* τ *su* $(-\infty,0]$ *soddisfa l'assioma* T_1.
5. *Sia* $f : (\mathbb{R},\tau) \to (\mathbb{R},\tau)$ *definita da* $f(x) = x^2$. *Provare che* f *è continua.*

Svolgimento. 1. 1. Proviamo che $\mathfrak{B}$ è base di una topologia su $\mathbb{R}$ mostrando che sono soddisfatte le ipotesi del *Teorema di esistenza e unicità della topologia generata da una base.*

(i) $\bigcup_{B\in\mathfrak{B}} B = \mathbb{R}$ in quanto $\mathbb{R} \in \mathfrak{B}$, essendo un aperto di τ_0 contenente $[0,1]$.

(ii) Occorre provare che

$$\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B} \text{ t.c. } B_1 \cap B_2 \neq \emptyset,\ \forall x \in B_1 \cap B_2\ \exists B_x \in \mathfrak{B} \text{ t.c. } x \in B_x \subset B_1 \cap B_2\ .$$

Siano dunque $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ tali che $B_1 \cap B_1 \neq \emptyset$ e distinguamo i seguenti casi:
(I) Se $B_1, B_2 \in \tau_0$, $[0,1] \subset B_1$ e $[0,1] \subset B_2$, allora $B_1 \cap B_2 \in \tau_0$ e $[0,1] \subset B_1 \cap B_2$. Pertanto $B_1 \cap B_2 \in \mathfrak{B}$ e dunque per ogni $x \in B_1 \cap B_2$ basta scegliere $B_x = B_1 \cap B_2$.
(II) Se $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}$ e $B_1, B_2 \subset (-\infty, 0)$, allora $B_1 \cap B_2 \subset (-\infty, 0)$. Pertanto $B_1 \cap B_2 \in \mathfrak{B}$ e dunque per ogni $x \in B_1 \cap B_2$ basta scegliere $B_x = B_1 \cap B_2$.
(III) Se $B_1 \in \tau_0$ e $[0,1] \subset B_1$, mentre $B_2 \subset (-\infty, 0)$, allora $B_1 \cap B_2 \subset B_2 \subset (-\infty, 0)$. Pertanto $B_1 \cap B_2 \in \mathfrak{B}$ e dunque per ogni $x \in B_1 \cap B_2$ basta scegliere $B_x = B_1 \cap B_2$.

Dunque, essendo verificate tutte le ipotesi del Teorema, $\mathfrak{B}$ è base di un'unica topologia τ su $\mathbb{R}$. Inoltre, per ogni $A \subset \mathbb{R}$ si ha che

$$A \in \tau \ \Leftrightarrow\ \forall x \in A\ \exists B \in \mathfrak{B} \text{ t.c. } x \in B \subset A.$$

2.

- $Int[0,1] = \emptyset$. Infatti, se così non fosse, esisterebbero $x \in [0,1]$ e $B \in \mathfrak{B}$ tali che $x \in B \subset [0,1]$. Allora B deve essere un aperto in τ_0 tale che $[0,1] \subset B$. Ma ciò è assurdo in quanto, dovendo valere la doppia inclusione, risulterebbe $B = [0,1] \notin \tau_0$.

- $Int[1,+\infty) = \emptyset$ in quanto $[0,1] \not\subset [1,+\infty)$ e $[1,+\infty) \not\subset (-\infty,0)$, per cui non ci sono elementi di $\mathfrak{B}$, e a maggior ragione elementi di τ, contenuti in $[1,+\infty)$.

- $Int(-3,2] = (-3,2)$. Infatti, poichè $(-3,2) \in \tau_0$ e $[0,1] \subset (-3,2)$, $(-3,2) \in \mathfrak{B} \subset \tau$, cioè è un aperto contenuto in $(-3,2]$. Quindi $(-3,2) \subset Int(-3,2]$. In realtà vale l'uguaglianza in quanto, se $2 \in Int(-3,2]$, esisterebbe $B \in \mathfrak{B}$ tale che $2 \in B \subset (-3,2]$; ma dovendo essere $B \in \tau_0$, esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon) \subset B \subset (-3,2]$, il che è assurdo.

3. $\mathbb{R}$ non è compatto rispetto a τ. Infatti, per ogni $n \geq 2$ si consideri $A_n = (-\infty, n)$: A_n è un aperto di τ_0, contenente $[0,1]$, per cui $A_n \in \mathfrak{B} \subset \tau$; inoltre $\bigcup_{n\geq 2} A_n = \mathbb{R}$. Dunque $\{A_n\}_{n\geq 2}$ è un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$. Tuttavia questo non ammette sottoricoprimento finito. Infatti, se ne ammettesse uno, $\{A_{n_1}, \ldots, A_{n_k}\}$, detto $\overline{n} = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$, si avrebbe

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{k} A_{n_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (-\infty, n_i) = (-\infty, \overline{n}) \ ,$$

il che è assurdo.

4. Sia τ' la topologia indotta da τ su $(-\infty, 0]$. Una base di τ' è data da $\mathfrak{B}' = \{(-\infty,0] \cap B \mid B \in \mathfrak{B}\}$.
Proviamo che τ' soddisfa l'assioma T_1 provando che per ogni $x \in (-\infty,0]$ $\complement_{(-\infty,0]}\{x\} \in \tau'$. Sia dunque $x \in (-\infty,0]$. Se $x = 0$, allora $\complement_{(-\infty,0]}\{0\} = (-\infty,0) \in \mathfrak{B}' \subset \tau'$ in quanto $(-\infty,0) \in \mathfrak{B}$ e $(-\infty,0) \subset (\infty,0]$. Invece, se $x < 0$, allora

$$\complement_{(-\infty,0]}\{x\} = (-\infty,x) \cup (x,0] = [(-\infty,x) \cup (x,2)] \cap (-\infty,0] \in \mathfrak{B}' \subset \tau'$$

in quanto $(-\infty,x) \cup (x,2) \in \mathfrak{B}$, essendo un aperto di τ_0 contenete $[0,1]$.

5. Sia $f : (\mathbb{R},\tau) \to (\mathbb{R},\tau)$ tale che $f(x) = x^2$. Poichè la controimmagine dell'unione è uguale all'unione delle controimmagini e ogni aperto si può scrivere come unione di elementi della base, per provare che f è continua è sufficiente verificare che $f^{-1}(B) \in \tau$ per ogni $B \in B$.
Distinguiamo due casi:

(I) Se $B \subset \mathbb{R}$ è tale che $B \subset (-\infty,0)$, allora $f^{-1}(B) = \emptyset \in \tau$.

(II) Se $B \in \tau_0$ e $[0,1] \subset B$, allora $f^{-1}(B) \in \tau_0$ perchè $f : (\mathbb{R}, \tau_0) \to (\mathbb{R}, \tau_0)$ è continua; inoltre

$$[0,1] \subset [-1,1] = f^{-1}([0,1]) \subset f^{-1}(B) \ .$$

Pertanto $f^{-1}(B) \in \mathfrak{B} \subset \tau$.

□

ESERCIZIO (4/4/2019)
Si ponga

$$\tau = \{(-\infty, -n) \cup (n, +\infty) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\} \ .$$

1. Provare che τ è una topologia su $\mathbb{R}$.
2. Determinare $Int[0,+\infty)$, $Int((-\infty,-1] \cup [1,+\infty))$, $Int\mathbb{Q}$ rispetto a τ.
3. Stabilire se $\mathbb{R}$ è compatto rispetto a τ.
4. Verificare che $[1,2]$ è chiuso in $[1,+\infty)$ rispetto alla topologia indotta da τ su $[1,+\infty)$.
5. Provare che la funzione $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ definita da $f(x) = -x$ è un omeomorfismo.
6. Si mostri che, se $E \subset \mathbb{R}$ e $x \in \overline{E}$, allora $-x \in \overline{E}$.

Svolgimento. 1. Per provare che τ è una topologia su $\mathbb{R}$ verifichiamo che sono soddisfatti gli assiomi della definizione di topologia.

(i) $\mathbb{R}, \emptyset \in \tau$ per costruzione.

(ii) Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di elementi di τ. Se esiste $j \in I$ tale che $A_j = \mathbb{R}$, allora $\bigcup_{i\in I} A_i = \mathbb{R} \in \tau$. Altrimenti, per ogni $i \in I$, $A_i = (-\infty, -n_i) \cup (n_i, +\infty)$, con $n_i \in \mathbb{N}$, oppure $A_i = \emptyset$: se tutti gli A_i sono vuoti, allora $\bigcup_{i\in I} A_i = \emptyset \in \tau$; altrimenti

$$\bigcup_{i\in I} A_i = (-\infty, -\overline{n}) \cup (\overline{n}, +\infty) \in \tau,$$

con $\overline{n} = \min_{i\in I}\{n_i\} \in \mathbb{N}$.
Quindi per ogni $\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$ si ha che $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$.

(iii) Siano $A_1, A_2 \in \tau$. Chiaramente, se uno tra A_1 e A_2 è $\emptyset$ oppue $\mathbb{R}$, allora $A_1 \cap A_2 \in \tau$: nel primo caso, infatti $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, nel secondo, invece, $A_1 \cap A_2 = A_i \in \tau$ (con $i \in \{1,2\}$). Infine se per ogni $i \in \{1,2\}$ $A_i = (-\infty, -n_i) \cup (n_i, +\infty)$, allora $A_1 \cap A_2 = (-\infty, -\overline{n}) \cup (\overline{n}, +\infty) \in \tau$, con $\overline{n} = \max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}$.
Pertanto per ogni $A_1, A_2 \in \tau$ si ha che $A_1 \cap A_2 \in \tau$.

Dunque, a norma di definizione, τ è una topologia su $\mathbb{R}$.

2.

- $Int[0,+\infty) = \emptyset$ in quanto $[0,+\infty)$ non contiene aperti non vuoti.
- $Int((-\infty,-1]\cup[1,+\infty)) = (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ in quanto $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \in \tau$ ed è il più grande aperto contenuto in $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. Infatti, se per assurdo $1 \in Int((-\infty,-1]\cup[1,+\infty))$, allora esisterebbe un aperto $A \in \tau$ tale che
$$1 \in A \subset (-\infty,-1]\cup[1,+\infty),$$
il che è impossibile dato che gli unici aperti contenenti 1 sono $\mathbb{R}$ e $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, che non sono contenuti in $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. Analogamente si prova che $-1 \notin Int((-\infty,-1]\cup[1,+\infty))$.
- $Int\mathbb{Q} = \emptyset$ in quanto, a causa della densità di $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, non esistono aperti non vuoti contenuti in $\mathbb{Q}$.

3. $\mathbb{R}$ è compatto rispetto a τ in quanto $\mathbb{R}$ è l'unico aperto contenente 0, per cui ogni ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$ deve avere $\mathbb{R}$ stesso tra i suoi elementi. Pertanto ogni ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$ ammette $\{\mathbb{R}\}$ come sottoricoprimento finito.

4. Sia $\tau' := \{A\cap[1,+\infty) \mid A \in \tau\}$ la topologia indotta da τ su $[1,+\infty)$. Allora $[1,2]$ è chiuso in $[1,+\infty)$ rispetto a τ' perchè il suo complementare è aperto. Infatti:
$$\complement_{[1,+\infty)}[1,2] = (2,+\infty) = A\cap[1,+\infty) \in \tau' \ ,$$
con $A = (-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

5. Osserviamo anzitutto che f è bigettiva, con inversa $f^{-1} = f$. Quindi, per provare che f è un omeomorfismo, è sufficiente provare che f è continua. A tal fine proviamo che $f^{-1}(A) \in \tau$ per ogni $A \in \tau$.
Certamente questo è vero se $A = \mathbb{R}$ oppure $A = \emptyset$. Consideriamo quindi $A = (-\infty,-n)\cup(n,+\infty) \in \tau$, con $n \in \mathbb{N}$: poichè A è simmetrico rispetto a 0 e f è la riflessione rispetto a 0, è chiaro che $f^{-1}(A) = A \in \tau$. In effetti:
$$\begin{aligned} f^{-1}(A) &= \{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\in A\} = \\ &= \{x\in\mathbb{R} \mid -x<-n \ \vee\ -x>n\} = \\ &= \{x\in\mathbb{R} \mid x>n \ \vee\ x<-n\} = \\ &= (-\infty,-n)\cup(n,+\infty) = A\in\tau \end{aligned}$$

6. <u>1° MODO</u>: Sia $E \subset \mathbb{R}$ e sia $x \in \overline{E}$. Allora, per una caratterizzazione dei punti di aderenza, $U\cap E \neq \emptyset$ per ogni U intorno di x. Proviamo che vale la stessa proprietà in corrispondenza di $-x$.

Sia dunque V un intorno di $-x$: per definizione di intorno, esiste $A \in \tau$ tale che $-x \in A \subset V$. Ma poichè gli aperti di τ sono simmetrici rispetto a 0, se $-x \in A$, allora anche $x \in A \subset V$. Segue che V è anche intorno di x, e quindi, per quanto osservato all'inizio, si ha che $V \cap E \neq \emptyset$.
In definitiva abbiamo provato che per ogni V intorno di $-x$ si ha che $V \cap E \neq \emptyset$, per cui $-x \in \overline{E}$.

2° MODO: Sia $E \subset \mathbb{R}$ e poniamo $-E := \{-x \mid x \in E\}$. Essendo $\overline{E}$ un chiuso di $(\mathbb{R}, \tau)$, $\overline{E}$ è il complementare di un insieme aperto e poichè gli aperti di τ sono tutti simmetrici rispetto a 0, anche $\overline{E}$ lo è, quindi $\overline{E} = -\overline{E}$. Pertanto se $x \in \overline{E}$ allora $-x \in -\overline{E} = \overline{E}$.

Osservazione: Avendo provato che $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ tale che $f(x) = -x$ è un omeomorfismo, potrebbe sorgere spontanea l'idea di dimostrare la proprietà 6. usando il fatto che per ogni $E \subset \mathbb{R}$ risulta $f(\overline{E}) = \overline{f(E)}$, cioè $-\overline{E} = \overline{-E}$. Quindi, se $x \in \overline{E}$, allora $-x \in -\overline{E} = \overline{-E}$. Ma da ciò non si riesce a giungere alla conclusione in quanto non è detto che $\overline{-E} = \overline{E}$ (questo è vero ad esempio nel caso particolare in cui E è simmetrico rispetto a 0, ossia se $-E = E$).

$\square$

ESERCIZI DEL SECONDO TIPO

ESERCIZIO (9/6/2017)
Sia n un intero, $n > 2$, e si ponga

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \neq 0\}, \quad W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$$

(a) Mostrare che A è aperto in $\mathbb{R}^n$.
(b) Mostrare che A ha esattamente due componenti connesse.
(c) Considerata la relazione di equivalenza $\sim$ su $\mathbb{R}^n$ definita da

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in W$$

mostrare che lo spazio quoziente $\mathbb{R}^n/_\sim$ è omeomorfo a $\mathbb{R}$.

Svolgimento. (a) Si consideri l'applicazione proiezione sul primo fattore $p_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.c. $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1$ e si osservi che

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) = 0\}^C = (p_1^{-1}(\{0\}))^C \ ,$$

che è aperto perchè è il complementare di un chiuso. Infatti p_1 è continua e $\{0\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$ (essendo $\mathbb{R}$ uno spazio T_1).

Osservazione: Gli spazi vettoriali di dimensione finita si possono munire in modo canonico di una topologia e si dimostra che rispetto ad essa, i sottospazi vettoriali sono chiusi.
Di fatto la soluzione proposta ricalca la dimostrazione di quest'ultima proprietà. Pertanto, noto il risultato generale e tenendo presente che la topologia di $\mathbb{R}^n$ come spazio vettoriale coincide con quella naturale, è sufficiente osservare che W è l'iperpiano di $\mathbb{R}^n$ di equazione $W : x_1 = 0$, quindi è chiuso, e A, che ne è il complementare, è aperto in $\mathbb{R}^n$.

(b) Siano

$$A_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0\} = p_1^{-1}((0, +\infty))$$

$$A_- := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 < 0\} = p_1^{-1}((-\infty, 0)) \ .$$

$A_\pm \subset A$ sono aperti in $\mathbb{R}^n$ (perchè controimmangini di aperti mediante un'applicazione continua), quindi anche in A. Inoltre

$$A = A_+ \cup A_- \quad \text{e} \quad A_+ \cap A_- = \emptyset \ .$$

Dunque A è unione disgiunta di aperti non vuoti, cioè A è sconnesso. Segue che A possiede almeno due componenti connesse. Allora, se proviamo che A_+ e A_- sono componenti connesse di A, avremo l'asserto. A tal fine è sufficiente provare che A_+ e A_- sono aperti, chiusi e connessi in A.
Abbiamo già detto che sono aperti; inoltre, essendo uno il complementare dell'altro, sono anche chiusi. Infine A_+ è connesso perchè è connesso per archi: infatti, per ogni $x, y \in A_+$ basta considerare il segmento congiungente x e y

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n \quad \text{t.c.} \quad \forall t \in [0,1] \quad \gamma(t) = ty + (1-t)x$$

Si tratta ovviamente di un'applicazione continua, quindi di un arco il cui supporto è contenuto interamente in A_+ in quanto la prima componente di $\gamma(t)$, $\gamma_1(t) = tx_1 + (1-t)y_1$, è sempre strettamente positiva, essendo somma di due quantità positive, mai contemporaneamente nulle.
In modo del tutto analogo si prova la connessione di A_-.

(c) Osserviamo che $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x \sim y \ \Leftrightarrow \ x - y \in W \ \Leftrightarrow \ x_1 - y_1 = 0 \ \Leftrightarrow \ x_1 = y_1 \ \Leftrightarrow \ p_1(x) = p_1(y) \ .$$

Quindi, detta $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/_\sim$ la surgezione canonica, abbiamo che $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\pi(x) = \pi(y) \ \Leftrightarrow \ [x]_\sim = [y]_\sim \Leftrightarrow \ x \sim y \ \Leftrightarrow \ p_1(x) = p_1(y) \ .$$

Ora, per definizione di topologia quoziente, π è una identificazione. Inoltre, essendo una proiezione, p_1 è continua, surgettiva e aperta, quindi è anch'essa una identificazione.
In definitiva $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/_\sim$ e $p_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono due identificazioni tali che $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\pi(x) = \pi(y) \ \Leftrightarrow \ p_1(x) = p_1(y) \ .$$

Quindi, per il Teorema di unicità della topologia quoziente, esiste un unico omeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^n/_\sim \to \mathbb{R}$ che renda communtativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "p_1"'] & \mathbb{R}^n/_\sim \arrow[dl, "\varphi"] \\ \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Quindi $\mathbb{R}^n/_\sim$ è omeomorfo a $\mathbb{R}$.

$\square$

ESERCIZIO (23/6/2017)
Si consideri il sottospazio K di $\mathbb{R}P_2$ definito da:

$$K = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}P_2 \mid \exists i \in \{1, 2, 3\} \ t.c.\ x_i = 0\}.$$

(a) Mostrare che K è compatto.
(b) Mostrare che K è connesso.
(c) Posto $U = \mathbb{R}P_2 \setminus \{[1, 0, 0]\}$, mostrare che l'applicazione $F : U \to \mathbb{R}P_2$ definita da $F([x_1, x_2, x_3]) = [0, x_2, x_3]$ è continua.

Svolgimento. 1° MODO (a) Consideriamo la surgezione canonica $\pi : (\mathbb{R}^3)^* \to \mathbb{R}\mathrm{P}_2$ e ricordiamo che la restrizione di π alla sfera unitaria di $\mathbb{R}^3$, $\pi_{|\,\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}_2$, è continua e surgettiva.
Per ogni $i = 1, 2, 3$ poniamo

$$K_i := \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}\mathrm{P}_2 \ \mid x_i = 0\} \ ,$$

così che $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$. Inoltre, per ogni $i = 1, 2, 3$ definiamo

$$C_i := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \ \mid x_i = 0\} \ :$$

C_i è l'intersezione di $\mathbb{S}^2$ con il piano coordinato $H_i = \{x_i = 0\}$ di $\mathbb{R}^3$ e poichè H_i è chiuso in $\mathbb{R}^3$ (perchè iperpiano), C_i è chiuso nel compatto $\mathbb{S}^2$, quindi è compatto. Allora dalla continuità di $\pi_{|\,\mathbb{S}^2}$ segue che $\forall i = 1, 2, 3$ $\pi_{|\,\mathbb{S}^2}(C_i) = K_i$ è compatto. Pertanto $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ è compatto (perchè unione finita di compatti).

(b) Mantenendo le stesse notazioni del punto (a), osserviamo che le circonferenze C_i $(i = 1, 2, 3)$ sono sostegni di opportuni archi su $\mathbb{S}^2$, quindi sono connesse per archi; inoltre, avendo a due a due intersezione non vuota, si ha che l'unione $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ è connessa per archi. Quindi

$$K = \bigcup_{i=1}^{3} K_i = \bigcup_{i=1}^{3} \pi_{|\,\mathbb{S}^2}(C_i) = \pi_{|\,\mathbb{S}^2}(\bigcup_{i=1}^{3} C_i) \ ,$$

cioè K è immagine di un insieme connesso per archi mediante un'applicazione continua. Ne consegue che anche K è connesso per archi, quindi connesso.

2° MODO (a-b) Per ogni $i = 1, 2, 3$ $H_i := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e $K_i = \pi(H_i^*)$. Allora K_i è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{R}\mathrm{P}_2$, quindi K_i è chiuso in $\mathbb{R}\mathrm{P}_2$, che è compatto. Pertanto K_i è compatto per ogni $i = 1, 2, 3$.
Di qui, procedendo come nel 1° MODO, segue che $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ è compatto, perchè unione finita di compatti.
Ora, poichè H_i è un sottospazio vettoriale 2-dimensionale di $\mathbb{R}^3$, per ogni

$i = 1, 2, 3$, $K_i = \pi(H_i^*)$ è un sottospazio proiettivo di dimensione 1, quindi può essere munito in modo canonico di una struttura di retta geometrica proiettiva mediante un opportuno sistema coordinato $h_i : K_i \to \mathbb{R}P_1$.
Allora, se riusciamo a provare che tali sistemi coordinati sono omeomorfismi, sapendo che $\mathbb{R}P_1$ è connesso, avremo che ogni K_i è connesso. In tal caso, $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ risulterà connesso perchè unione di connessi aventi a due a due intersezione non vuota.
Si tratta dunque di provare che gli h_i sono omeomorfismi. Per semplicità di notazione ragioniamo su h_3, ma le stesse considerazioni valgono in maniera del tutto analoga anche per h_1 e h_2.
Un sistema coordinato su K_3 è dato da:

$$h_3 : K_3 \to \mathbb{R}P_1 \quad \text{t.c.} \quad h_3([x_1, x_2, 0]) = [x_1, x_2] \ .$$

Dalla teoria sappiamo che su uno spazio geometrico proiettivo esiste un'unica topologia rispetto alla quale tutti i sistemi coordinati sono omeomorfismi (o, equivalentemente, un dato sistema coordinato è un omeomorfismo): se quest'ultima fosse la topologia di K_3, non ci sarebbe nulla da provare. Tuttavia, nel nostro caso, su K_3 stiamo considerando la topologia indotta da $\mathbb{R}\mathrm{P}_2$, per cui non è detto a priori che h_3 sia un omeomorfismo, ma occorre verificarlo (ed in tal caso avremo provato che le due topologie, di fatto, coincidono). A tal fine consideriamo le seguenti applicazioni:

$$p_3 : H_3 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{t.c.} \quad (x_1, x_2, 0) \mapsto (x_1, x_2) \ ;$$

$$\pi_1 : (\mathbb{R}^2)^* \to \mathbb{R}P_1 \quad \text{surgezione canonica relativa a } \mathbb{R}P_1 \ ;$$

$$\pi_2 = \pi_{|H_3^*} : H_3^* \to K_3 \quad \text{restrizione ad } H_3^* \text{ della surgezione canonica relativa a } \mathbb{R}\mathrm{P}_2 \ .$$

Allora il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} H_3^* \arrow[r, "p_3"] \arrow[d, "\pi_2"'] & (\mathbb{R}^2)^* \arrow[d, "\pi_1"] \\ K_3 \arrow[r, "h_3"'] & \mathbb{R}P_1 \end{tikzcd}$$

cioè $h_3 \circ \pi_2 = \pi_1 \circ p_3$. Di qui, osservando che $\pi_1 \circ p_3$ è continua (perchè composizione di applicazioni continue) e π_2 è una identificazione (perchè continua, surgettiva e aperta), segue che h_3 è continua. Inoltre, trattandosi di un sistema coordinato, h_3 è una bigezione definita sul compatto K_3, a valori nello spazio di Hausdorff $\mathbb{R}P_1$. Quindi h_3 è un omeomorfismo.
In definitiva, a patto di ripetere lo stesso ragionamento su h_1 e h_2, abbiamo provato che ogni sistema coordinato $h_i : K_i \to \mathbb{R}P_1$ è un omeomorfismo, come volevamo.

(c) Osserviamo anzitutto che

$$\begin{aligned} U = \mathbb{RP}_2 \setminus \{[1,0,0]\} &= \{[x_1,x_2,x_3] \in \mathbb{RP}_2 \mid [x_1,x_2,x_3] \neq [1,0,0]\} = \\ &= \{[x_1,x_2,x_3] \in \mathbb{RP}_2 \mid (x_1,x_2,x_3) \neq \lambda(1,0,0),\ \lambda \in \mathbb{R}^*\} = \\ &= \{[x] \in \mathbb{RP}_2 \mid x \in \mathbb{R}^3 \setminus < e_1 >\} = \\ &= \pi(H), \end{aligned}$$

avendo posto $H := \mathbb{R}^3 \setminus < e_1 >$. Consideriamo le applicazioni

$$p := \pi_{|H} : H \to \pi(H) = U$$

$$\varphi : H \to (\mathbb{R}^3)^* \text{ t.c. } \forall (x_1,x_2,x_3) \in H \quad \varphi(x_1,x_2,x_3) = (0,x_2,x_3)\ .$$

Allora, per come è definita $F : U \to \mathbb{RP}_2$, risulta che $F \circ p = \pi \circ \varphi$, cioè il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & (\mathbb{R}^3)^* \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[r, "F"'] & \mathbb{RP}_2 \end{tikzcd}$$

Ora: π è continua e anche φ lo è, essendo la restrizione ad H della proiezione di $\mathbb{R}^3$ sul piano di equazione $x_1 = 0$. Quindi $F \circ p = \pi \circ \varphi$ è continua. Inoltre p è surgettiva (per costruzione), continua e aperta (perchè restrizione all'aperto $H \subset (\mathbb{R}^3)^*$ di π, che è continua e aperta). Pertanto p è una identificazione e la tesi segue dalla *Proprietà universale della topologia quoziente.*

$\square$

ESERCIZIO (11/7/2017)

Sia X un insieme infinito e si denoti con τ la topologia cofinita su X.
(a) Mostrare che (X,τ) è connesso.
(b) Mostrare che per ogni spazio topologico (Z,τ') che soddisfi l'assioma T_1, ogni applicazione ingettiva $f : (Z,\tau') \to (X,\tau)$ è continua.
(c) Provare che ogni sottoinsieme non vuoto E di X è compatto.

Svolgimento. Ricordiamo anzitutto la definizione di topologia cofinita τ su X: per ogni $A \subset X$

$$A \in \tau \iff A^C = X \setminus A \text{ è finito } \textit{oppure } A = \emptyset\ .$$

Segue che per ogni $F \subset X$

$$F \text{ è chiuso (rispetto a } \tau) \iff F \text{ è finito } \textit{oppure } F = X\ .$$

(a) 1° MODO: Sia $A \in \tau$, con $A \neq \emptyset$ e $A \neq X$. Poichè A è aperto e non vuoto, $A^C = X \setminus A$ è finito; e poichè X è infinito segue che A è infinito. Allora, essendo $A \neq X$, A non può essere chiuso.
In definitiva abbiamo provato che non esistono sottoinsiemi di X che siano contemporaneamente aperti e chiusi in X, oltre a $\emptyset$ e X. Pertanto, a norma di definizione (X, τ) è connesso.

2° MODO: Usando una caratterizzazione degli spazi topologici connessi, proviamo che (X, τ) è connesso mostrando che X non si può scrivere come unione disgiunta di aperti non vuoti. A tal fine è sufficiente osservare che comunque si considerino due sottoinsiemi aperti e non vuoti di X, essi non sono disgiunti. Infatti, per ogni $A, B \in \tau$, con $A, B \neq \emptyset$, A^C e B^C sono finiti, quindi

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C \quad \text{è finito.}$$

Allora, poichè $A \cap B \in \tau$ (perchè intersezione di due aperti), segue che $A \cap B \neq \emptyset$.

(b) Siano (Z, τ') uno spazio topologico T_1 e $f : (Z, \tau') \to (X, \tau)$ una funzione ingettiva. Proviamo che f è continua provando che la controimmagine di ogni chiuso di (X, τ) è chiuso in (Z, τ').
Sia dunque $F \subset X$ un chiuso e distinguiamo due casi:

- Se $F = X$ allora $f^{-1}(F) = f^{-1}(X) = Z$ è chiuso in (Z, τ');
- Se F è finito, poichè f è ingettiva, $card(F) = card(f^{-1}(F))$. Quindi anche $f^{-1}(F)$ è finito, cioè $f^{-1}(F) = \{z_1, \dots, z_n\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{z_i\}$. Allora, essendo Z uno spazio T_1, per ogni $i = 1, \dots, n \quad \{z_i\}$ è chiuso in Z, e quindi anche $f^{-1}(F)$ lo è, essendo unione finita di chiusi.

(c) Sia $E \subset X$ un sottoinsieme non vuoto di X e sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una famiglia di aperti di X tali che

$$E \subset \bigcup_{i \in I} U_i \ .$$

Poichè $E \neq \emptyset$, esiste $j \in I$ tale che $U_j \neq \emptyset$; allora, essendo U_j aperto, U_j^C è finito. Poichè $E \setminus U_j \subset X \setminus U_j = U_j^C$, anche $E \setminus U_j$ è finito, diciamo $E \setminus U_j^C = \{x_1, \dots, x_n\}$. Ora, per ogni $k = 1, \dots, n$

$$x_k \in E \setminus U_j \subset \bigcup_{i \neq j} U_i \ \Rightarrow \ \exists i_k \in i \text{ (con } i_k \neq j) \text{ t.c. } x_k \in U_{i_k} \ .$$

Pertanto:

$$E \subset U_j \cup (E \setminus U_j) = U_j \cup \{x_1, \dots, x_n\} \subset U_j \cup U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$$

e quindi $\{U_j, U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$ è un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$. Data l'arbitrarietà di $\mathcal{U}$ si ha la tesi.

$\square$

ESERCIZIO (7/9/2017)
Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia τ' la topologia prodotto su $X \times X$ da essa determinata.
(a) Dati due sottoinsiemi $E, F \subset X$, mostrare che la topologia indotta da τ' su $E \times F$ coincide con la topologia prodotto delle topologie indotte da τ su E e F rispettivamente.
(b) Si assuma X connesso. Data una funzione continua $f : X \to \mathbb{R}$, posto

$$Z = \{(x, y) \in X \times X \mid f(x) = f(y)\} \ ,$$

mostrare che:

$$f \text{ è costante} \Leftrightarrow Z \text{ è aperto in } X \times X.$$

Svolgimento. (a) <u>1° MODO:</u> Si ricordi anzitutto che la topologia prodotto τ' su $X \times X$ è definita come l'unica topologia su $X \times X$ avente $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U, V \in \tau\}$ come base.
Siano $\tau_E = \{E \cap U \mid U \in \tau\}$ e $\tau_F = \{F \cap U \mid U \in \tau\}$ le topologie indotte da τ su E ed F rispettivamente, e sia $\tau_E \times \tau_F$ la topologia prodotto su $E \times F$. Inoltre denotiamo con $\tau_{E \times F} = \{(E \times F) \cap U \mid U \in \tau'\}$ la topologia indotta su $E \times F$ dalla topologia prodotto τ' su $X \times X$.
Sia dunque $V \subset E \times F$:

$$V \in \tau_{E \times F} \ \Leftrightarrow \ V = (E \times F) \cap U \text{ per qualche } U \in \tau'.$$

Ma, per come è definita la topologia prodotto τ' su $X \times X$, $U \in \tau'$ si può scrivere come unione di opportuni elementi della bese $\mathcal{B}$, cioè $U = \bigcup_{i \in I} A_i \times B_i$ (con $A_i, B_i \in \tau$ e I insieme di indici). Allora:

$$\begin{aligned} V \in \tau_{E \times F} \quad &\Leftrightarrow \quad V = (E \times F) \cap (\bigcup_{i \in I} A_i \times B_i) \ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad V = \bigcup_{i \in I} (E \times F) \cap (A_i \times B_i) \ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad V = \bigcup_{i \in I} (E \cap A_i) \times (F \cap B_i) \ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad V \in \tau_E \times \tau_F \end{aligned}$$

ove l'ultima equivalenza segue dal fatto che per ogni $i \in I$ $E \cap A_i \in \tau_E$ e $F \cap B_i \in \tau_F$, per cui $(E \cap A_i) \times (F \cap B_i)$ è un elemento della base della topologia prodotto $\tau_E \times \tau_F$.

<u>2° MODO:</u> Sia $\mathcal{B}$ una base di (X, τ). Dalla teoria è noto che

$$\mathcal{B} \times \mathcal{B} = \{U \times V \mid U, V \in \mathcal{B}\}$$

è un'altra base di $(X \times X, \tau')$. Allora, mantenendo le notazioni precedenti, si ha che

$$(\mathcal{B} \times \mathcal{B})_{E \times F} = \{(E \times F) \cap (U \times V) \mid U, V \in \mathcal{B}\} \quad (*)$$

è base di $\tau_{E \times F}$, mentre

$$\mathcal{B}_E = \{E \cap U \mid U \in \mathcal{B}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_F = \{F \cap U \mid U \in \mathcal{B}\}$$

sono basi rispettivamente di τ_E e τ_F. Da queste segue che

$$\mathcal{B}_E \times \mathcal{B}_F = \{(E \cap U) \times (F \cap V) \mid U, V \in \mathcal{B}\} \qquad (**)$$

è base di $\tau_E \times \tau_F$. Ma per ogni $U, V \in \mathcal{B}$ risulta che

$$(E \cap U) \times (F \cap V) = (E \times F) \cap (U \times V)\ .$$

Pertanto, da (*) e (**) segue che $\mathcal{B}_E \times \mathcal{B}_F = (\mathcal{B} \times \mathcal{B})_{E \times F}$, e quindi $\tau_E \times \tau_F = \tau_{E \times F}$.

(b) Osserviamo che f è costante se e solo se per ogni $x, y \in X$ $f(x) = f(y)$, ossia se e solo se $Z = X \times X$. Allora proviamo che

$$Z = X \times X \ \Leftrightarrow \ Z \text{ è aperto in } X \times X$$

L'implicazione $\Rightarrow$ è ovvia. Supponiamo dunque che Z sia aperto in $X \times X$. Poichè $Z \neq \emptyset$ (in quanto vi appartengono le coppie del tipo (x, x), con $x \in X$) e $X \times X$ è connesso (perchè lo è X), per provare l'asserto è sufficiente provare che Z è anche chiuso. A tal fine proviamo che il suo complementare $Z^C = \{(x, y) \in X \times X \mid f(x) \neq f(y)\}$ è aperto.
Fissiamo un generico punto di Z^C, $(x, y) \in X \times X$ tale che $f(x) \neq f(y)$. Poichè $\mathbb{R}$ è T_2, esistono U e V intorni aperti di $f(x)$ e $f(y)$ rispettivamente, tali che $U \cap V = \emptyset$. Allora, per la continuità di f, $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(V)$ sono aperti in X e tali che $x \in f^{-1}(U)$, $y \in f^{-1}(V)$ e $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$. Pertanto $(x, y) \in f^{-1}(U) \times f^{-1}(V) \subset Z^C$ e $f^{-1}(U) \times f^{-1}(V)$ è aperto in $X \times X$. In definitiva Z^C è intorno di ogni suo punto, quindi è aperto.

$\square$

ESERCIZIO (21/9/2017)
Sia $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ un'applicazione continua tra due spazi topologici.

(a) Sia K un chiuso di Y. Provare che, se E è un sottoinsieme denso di X e tale che $f(E) \subset K$, allora si ha $f(X) \subset K$.
(b) Si assuma che X sia connesso e T_1 e che Y sia di Hausdorff. Sia inoltre $g : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ un'altra applicazione continua. Fissato un punto $x_0 \in X$, si supponga che per ogni $x \in X$ diverso da x_0 si abbia $f(x) = g(x)$. Provare che $f = g$.

Svolgimento. (a) Poichè E è denso in X, $\overline{E} = X$. Allora

$$f(X) = f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)} \subset \overline{K} = K \ ,$$

ove la prima inclusione segue dalla continuità di f, la seconda dall'ipotesi $f(E) \subset K$ e l'ultima uguaglianza segue dal fatto che K è chiuso in Y.

(b) NOTA: Benchè omesso dalla traccia, affinchè la proprietà risulti vera, occorre supporre che X non sia ridotto ad un solo punto $\{x_0\}$. Infatti, se fosse $X = \{x_0\}$, non essendoci punti di X diversi da x_0, l'ipotesi "per ogni $x \in X$ diverso da x_0 risulta $f(x) = g(x)$" sarebbe automaticamente verificata da ogni coppia di funzioni $f, g : X \to Y$, e quindi anche dalle funzioni tali che $f(x_0) \neq g(x_0)$. Pertanto non può essere sempre vero che $f = g$.

1° MODO: Per ipotesi $f = g$ su $X \setminus \{x_0\}$, occorre solo provare che $f(x_0) = g(x_0)$.
Supponiamo per assurdo che ciò non sia vero, ossia che $f(x_0) \neq g(x_0)$. Allora, poichè Y è T_2, esistono U intorno aperto di $f(x_0)$ e V intorno aperto di $g(x_0)$ tali che $U \cap V = \emptyset$. Ora:

f continua in $x_0 \Rightarrow$ in corr. di U, $\exists A$ intorno aperto di x_0 t.c. $f(A) \subset U$

g continua in $x_0 \Rightarrow$ in corr. di V, $\exists B$ intorno aperto di x_0 t.c. $f(B) \subset V$

Dunque $A \cap B$ è un aperto contenente x_0. In realtà $A \cap B = \{x_0\}$ in quanto, se esistesse un altro punto $x \in A \cap B$, con $x \neq x_0$, poichè $f = g$ su $X \setminus \{x_0\}$, si avrebbe $f(x) = g(x) \in U \cap V$, contraddicendo $U \cap V = \emptyset$.
In definitiva $\{x_0\}$ è aperto, ma anche chiuso (essendo X spazio T_1), contro l'ipotesi di connesione su X.

2° MODO: Poniamo $E := X \setminus \{x_0\}$ e $H = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$: per ipotesi $E \subset H \subset X$; e poichè E e H differiscono per un solo punto, $H = E$ oppure $H = X$. Vogliamo provare che $H = X$.
Osserviamo che, essendo X uno spazio T_1, $\{x_0\}$ è chiuso e quindi E è aperto in X. Inoltre, essendo X connesso, E non può essere anche chiuso. Pertanto, per provare l'asserto è sufficiente dimostrare che H è chiuso: a tal fine proveremo che $H^C := X \setminus H$ è aperto. Sia dunque $x \in H^C$: allora $f(x) \neq g(x)$ e poichè Y è T_2, esistono U intorno aperto di $f(x)$ e V intorno

aperto di $g(x)$ tali che $U \cap V = \emptyset$. Dalla continuità di f e g segue che $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ è un aperto contenente x e inoltre $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \subset H^C$, infatti $\forall y \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$, $f(y) \in U$ e $g(y) \in V$, ed essendo $U \cap V = \emptyset$ si ha che $f(y) \neq g(y)$, ossia $y \in H^C$. In definitiva H^C è intorno di ogni suo punto, quindi è aperto e H è chiuso.

<u>3° MODO</u>: Ragionando come nel "2° MODO", una via più rapida per dimostrare che H è chiuso è la seguente. Si ricordi che

$$Y \text{ è di Hausdorff} \iff \Delta = \{(y, y) \mid y \in Y\} \text{ è chiuso in } Y \times Y.$$

Allora, considerata l'applicazione

$$\varphi : X \to Y \times Y \quad \text{t.c.} \quad \forall x \in X \quad \varphi(x) = (f(x), g(x)) \ ,$$

φ è continua (perchè lo sono f e g) e $\varphi^{-1}(\Delta)$ è chiuso in X. Ma $\varphi^{-1}(\Delta)$ è esattamente H, infatti:

$$x \in \varphi^{-1}(\Delta) \ \Leftrightarrow \ \varphi(x) = (f(x), g(x)) \in \Delta \ \Leftrightarrow \ f(x) = g(x) \ \Leftrightarrow \ x \in H.$$

<u>4° MODO</u>: Manteniamo le stesse notazioni precedenti. Procedendo come nel "2° MODO", si prova che $E \subset X$ è aperto ma non può essere chiuso. Quindi E è strettamente contenuto nella sua chiusura; ma poichè $E = X \setminus \{x_0\}$, segue che $\overline{E} = X$, cioè E è denso in X.
Grazie al risultato richiamato nel "3° MODO", poichè Y è di Hausdorff, la diagonale di Y, $\Delta = \{(y, y) \mid y \in Y\}$, è chiusa nello spazio prodotto $Y \times Y$.
Ora, considerata nuovamente l'applicazione continua

$$\varphi : X \to Y \times Y \quad \text{t.c.} \quad \forall x \in X \quad \varphi(x) = (f(x), g(x)) \ ,$$

risulta che $\forall x \in E \ f(x) = g(x)$, cioè $\varphi(E) \subset \Delta$. Allora, data la densità di E in X, applicando il punto *(a)*, si ottiene che $\varphi(X) \subset \Delta$, cioè $\forall x \in X \ f(x) = g(x)$, che è l'asserto.

□

ESERCIZIO (14/11/2017)
(a) Si consideri la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ su $\mathbb{R}$ definita da

$$x\mathcal{R}y \iff x = y \ \vee \ x = -y \ .$$

Dimostrare che lo spazio quoziente $\mathbb{R}/_{\mathcal{R}}$ è omeomorfo a $[0, +\infty)$.
(b) Siano X uno spazio connesso e $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su X. Mostrare che se $X/_{\mathcal{R}}$ è uno spazio T_1, ed esistono almeno due classi di $\mathcal{R}$-equivalenza distinte, allora le classi di $\mathcal{R}$-equivalenza sono infinite.

Svolgimento. (a) Dalla definizione della relazione $\mathcal{R}$ segue che per ogni $x \in \mathbb{R} \quad [x]_{\mathcal{R}} = \{-x, x\}$. Quindi l'insieme quoziente è

$$\mathbb{R}/_{\mathcal{R}} = \{[x]_{\mathcal{R}} \mid x \geq 0\}.$$

Consideriamo la surgezione canonica $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/_{\mathcal{R}}$ tale che $x \mapsto [x]_{\mathcal{R}}$: per definizione di topologia quoziente π è una identificazione.
Ora, osserviamo che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$

$$\pi(x) = \pi(y) \;\Leftrightarrow\; x\mathcal{R}y \;\Leftrightarrow\; x = y \;\vee x = -y \;\Leftrightarrow\; |x| = |y| \;. \quad (*)$$

Allora consideriamo l'applicazione valore assoluto

$$\alpha : \mathbb{R} \to [0, +\infty) \text{ t.c. } \forall x \in \mathbb{R}\ \alpha(x) = |x| \;.$$

Ovviamente α è continua e surgettiva. Mostriamo che è aperta: poichè gli intervalli aperti (a, b) formano una base della topologia naturale su $\mathbb{R}$ è sufficiente verificare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, $\alpha((a, b))$ è aperto in $[0, +\infty)$. Siano dunque $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$: si ha che

$$\alpha((a,b)) = \begin{cases} (a,b) & \text{se } 0 \leq a < b \\ [0,c) & \text{se } a < 0 < b, \text{ con } c = \max\{|a|, b\} \\ (-b,-a) & \text{se } a < b \leq 0 \end{cases}$$

In ogni caso si ottiene un aperto di $[0, +\infty)$ (in quanto su $[0, +\infty)$ stiamo considerando la topologia indotta da quella naturale di $\mathbb{R}$).
In definitiva, α è continua surgettiva e aperta, quindi è una identificazione.
Inoltre, per (*), essa è tale che

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \alpha(x) = \alpha(y) \;\Leftrightarrow\; \pi(x) = \pi(y) \;.$$

Allora, per il *Teorema di unicità della topologia quoziente*, esiste un unico omeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}/_{\mathcal{R}} \to [0, +\infty)$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & {[0,+\infty)} \\ \mathbb{R}/_{\mathcal{R}} \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Dunque, per il solo fatto che esista un omeomorfismo (indipendentemente dal fatto che esso renda commutativo il diagramma), concludiamo che $\mathbb{R}/_{\mathcal{R}}$ e $[0, +\infty)$ sono omeomorfi.

Osservazione: L'idea di fondo di questo svolgimento deriva dall'osservazione che le classi di equivalenza sono formate da al più due elementi, uno l'opposto dell'altro. Per cui, scegliendo come rappresentante di ogni classe di equivalenza quello positivo, è chiaro che $\mathbb{R}/_{\mathcal{R}}$ e $[0,+\infty)$ sono in corrispondenza biunivoca mediante le applicazioni:

$$\varphi : \mathbb{R}/_{\mathcal{R}} \to [0,+\infty) \quad \text{t.c.} \quad [x]_{\mathcal{R}} \mapsto |x|$$

$$\varphi^{-1} : [0,+\infty) \to \mathbb{R}/_{\mathcal{R}} \quad \text{t.c.} \quad x \mapsto [x]_{\mathcal{R}} \ .$$

In effetti l'applicazione φ così definita è proprio quella che rende commutativo il diagramma precedente ($\varphi \circ \pi = \alpha$).
Quindi, di fatto, una volta fatta questa osservazione, si può dimostrare che $\mathbb{R}/_{\mathcal{R}}$ e $[0,+\infty)$ sono omeomorfi provando direttamente che φ (o φ^{-1}) è un omeomorfismo. A tel fine si potrebbe procedere in due modi: si potrebbe provare che φ e φ^{-1} sono continue, oppure che φ (o φ^{-1}) è continua e aperta (essendo una bigezione).
Posto $p := \varphi^{-1}$, risulta piuttosto agevole dimostrare che p è continua e aperta. Infatti, per quanto riguarda la continuità, basta osservare che $p = \pi_{|[0,+\infty)}$, cioè che p è restrizione della surgezione canonica, che è continua. Per verificare che p è aperta, stante la definizione di topologia quoziente, occorre provare che per ogni $A \subset [0,+\infty)$ aperto, $p^{-1}(p(A))$ è ancora aperto in $[0,+\infty)$; ma ciò è immediato perchè p è una bigezione e quindi $p^{-1}(p(A)) = A$.

(b) 1° MODO: Supponiamo per assurdo che le classi di $\mathcal{R}$-equivalenza siano finite, cioè che esista $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$ (dato che per ipotesi esistono almeno due classi di equivalenza distinte) ed esistano $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che

$$X/_{\mathcal{R}} = \{[x_i]_{\mathcal{R}} \mid i = 1, \ldots, n\} \ .$$

Poichè per ipotesi $X/_{\mathcal{R}}$ è uno spazio T_1, per ogni $i = 1, \ldots, n \quad \{[x_i]_{\mathcal{R}}\}$ è chiuso in $X/_{\mathcal{R}}$. Inoltre, detta $\pi : X \to X/_{\mathcal{R}}$ la surgezione canonica tale che $x \mapsto \pi(x) = [x]_{\mathcal{R}}$, essa è continua; quindi per ogni $i = 1, \ldots, n$ $\pi^{-1}(\{[x_i]_{\mathcal{R}}\})$ è chiuso in X. Ma

$$\pi^{-1}(\{[x_i]_{\mathcal{R}}\}) = \pi^{-1}(\pi(x_i)) = \{y \in X \mid \pi(y) = \pi(x_i)\} = \{y \in X \mid y \,\mathcal{R}\, x_i\} = [x_i]_{\mathcal{R}}$$

per cui le classi di equivalenza (riguardate come sottoinsiemi di X invece che come punti dello spazio quoziente) sono chiuse in X e ne costituiscono una partizione (per le proprietà delle relazioni di equivalenza). Dunque

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} [x_i]_{\mathcal{R}}$$

è unione disgiunta di un numero finito di chiusi non vuoti, il che implica che X è sconnesso (vedi Nota), contro l'ipotesi. Allora, poichè l'assurdo è derivato dall'aver supposto che le classi di equivalenza fossero in numero finito, concludiamo che esse sono infinite.

2° MODO: Modifichiamo leggermente lo svolgimento del 1° MODO: si tratta di cambiare punto di vista e riguardare le stesse proprietà precedenti sullo spazio quoziente $X/_{\mathcal{R}}$, anzichè su X.
Poichè X è connesso e la surgezione canonica $\pi : X \to X/_{\mathcal{R}}$ è continua e surgettiva, anche $X/_{\mathcal{R}} = \pi(X)$ è connesso. Inoltre, poichè $X/_{\mathcal{R}}$ è T_1, $\{[x]_{\mathcal{R}}\}$ è chiuso in $X/_{\mathcal{R}}$ per ogni $x \in X$. Ora, se per assurdo le classi di $\mathcal{R}$-equivalenza fossero finite, esisterebbero $x_1, \ldots, x_n \in X$ (con $n \geq 2$) tali che

$$X/_{\mathcal{R}} = \{[x_i]_{\mathcal{R}} \mid i = 1, \ldots, n\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{[x_i]_{\mathcal{R}}\} \ .$$

Quindi $X/_{\mathcal{R}}$ sarebbe unione diusgiunta di un numero finito di chiusi non vuoti, dunque sconnesso (vedi Nota), contro quanto osservato sopra.

Nota: Una delle caratterizzazioni degli spazi topologici sconnessi è la seguente:

X è sconnesso $\Leftrightarrow$ X è unione disgiunta di *due* chiusi non vuoti

Tuttavia è immediato constatare che vale un'analoga caratterizzazione ove al posto di *due* si considera un numero arbitrario (ma sempre finito) n di chiusi disgiunti e non vuoti. Infatti basta scrivere:

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} C_i = C_1 \cup \bigcup_{i=2}^{n} C_i = C_1 \cup K$$

ove $K = \bigcup_{i=2}^{n} C_i$ è chiuso (perchè unione finita di chiusi), disgiunto da C_1 e non vuoto.

$\square$

ESERCIZIO (10/1/2018)
Sia $\{C_i\}_{i \in I}$ una famiglia di chiusi di uno spazio topologico X.
(a) Si assuma che ogni punto $x \in X$ ammetta un intorno aperto U tale che l'insieme degli $i \in I$ per cui $U \cap C_i \neq \emptyset$ sia finito. Mostrare che $\bigcup_{i \in I} C_i$ è un chiuso.
(b) Si supponga che I sia finito e che $X = \bigcup_{i \in I} C_i$. Provare che per ogni spazio topologico Y e per ogni applicazione $f : X \to Y$ si ha:

$$\forall i \in I \ f_{|C_i} : C_i \to Y \text{ è continua} \Longrightarrow f \text{ è continua.}$$

Svolgimento. (a) Sia $C := \bigcup_{i \in I} C_i$: per provare che C è chiuso proviamo che $C^C = X \setminus C$ è aperto. Osserviamo anzitutto che

$$C^C = X \setminus C = X \setminus \bigcup_{i \in I} C_i = \bigcap_{i \in I} X \setminus C_i = \bigcap_{i \in I} C_i^C \ .$$

Sia $x \in C^C$, allora $x \in C_i^C \quad \forall i \in I$ (*). Per ipotesi x possiede un intorno aperto U che interseca solo un numero finito di C_i, cioè $\exists J \subset I$ finito tale che $U \cap C_i \neq \emptyset$ se e solo se $i \in J$. Allora per ogni $i \in I \setminus J \quad U \cap C_i = \emptyset$, e quindi $U \subset C_i^C$ per ogni $i \in I \setminus J$. Inoltre $\bigcup_{i \in J} C_i$ è unione *finita* di chiusi, quindi è un chiuso di X, ossia $X \setminus \bigcup_{i \in J} C_i = \bigcap_{i \in J} C_i^C$ è aperto. Allora definiamo

$$V := U \cap (\bigcap_{i \in J} C_i^C) \;:$$

V è un aperto (perchè intersezione di due aperti) contenete x (perchè U è intorno di x e vale (*)). Infine da

$$V \subset U \subset C_i^C \quad \forall i \in I \setminus J \quad \text{e} \quad V \subset \bigcap_{i \in J} C_i^C$$

segue che $V \subset \bigcap_{i \in I} C_i^C = C^C$.
In definitiva abbiamo provato che per ogni $x \in C^C$ esiste un aperto V tale che $x \in V \subset C^C$. Dunque, essendo intorno di ogni suo punto, C^C è aperto, e quindi C è chiuso.

Osservazione: Per provare che un insieme è chiuso si potrebbe anche verificare che esso coincide con la sua chiusura. Allora, poichè l'unione delle chiusure coincide con l'unione delle chiusure si potrebbe dire che:

$$\overline{C} = \overline{\bigcup_{i \in I} C_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{C_i} = \bigcup_{i \in I} C_i = C$$

e quindi l'asserto sarebbe provato. Tuttavia la seconda uguaglianza NON è corretta in quanto la proprietà richiamata è vera solo per famiglie <u>finite</u> di insiemi, in quanto in generale non è vero che l'unione di una famiglia qualsiasi di chiusi sia un chiuso. Si pensi, ad esempio alla successione $\{(-\infty, -\frac{1}{n}]\}_{n \geq 1}$: si tratta di una famiglia numerabile di chiusi di $\mathbb{R}$ la cui unione è l'intervallo $(-\infty, 0)$, che non è chiuso.

(b) Supponiamo ora che I sia finito e che $X = \bigcup_{i \in I} C_i$. Sia Y un altro spazio topologico e sia $f : X \to Y$ un'applicazione tale che per ogni $i \in I$ $f_{|C_i} : C_i \to Y$ sia continua.
Per una caratterizzazione delle funzioni continue, proviamo che $f : X \to Y$ è continua provando che la controimmagine mediante f di ogni chiuso di Y è chiusa in X. Sia dunque $K \subset Y$ un chiuso e consideriamo $f^{-1}(K) \subset X$. Osserviamo che

$$f^{-1}(K) = f^{-1}(k) \cap X = f^{-1}(K) \cap \bigcup_{i \in I} C_i = \bigcup_{i \in I} (f^{-1}(K) \cap C_i) = \bigcup_{i \in I} f_{|C_i}^{-1}(K).$$

Allora, essendo $f_{|C_i} : C_i \in Y$ continua per ogni $i \in I$, abbiamo che per ogni $i \in I \quad f_{|C_i}^{-1}(K)$ è chiuso in C_i, e quindi anche in X (essendo C_i chiuso in

X). Pertanto, essendo I finito per ipotesi, $f^{-1}(K)$ è unione finita di chiusi e quindi è chiuso in X. Dall'arbitrarietà di $K \subset Y$ chiuso, segue la tesi.

$\square$

ESERCIZIO (25/1/2018)

Sia $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un'applicazione lineare non nulla, dove $n \geq 2$.
(a) Posto $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) > 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) < 0\}$, mostrare che A e B sono aperti omeomorfi.
(b) Sia (X, τ) uno spazio di Hausdorff e siano z_0, z_1, z_2 tre punti distinti di X. Determinare tutti i punti $x \in \mathbb{R}^n$ in cui l'applicazione $F : \mathbb{R}^n \to X$, definita come segue, è continua.

$$F(x) = \begin{cases} z_0 & se\ \varphi(x) < 0 \\ z_1 & se\ \varphi(x) = 0 \\ z_2 & se\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$$

Svolgimento. (a) Osserviamo che $A = \varphi^{-1}((0, +\infty))$ e $B = \varphi^{-1}((-\infty, 0))$. Allora, ricordando che le applicazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita sono sempre continue, A e B sono aperti perchè controimmagini di aperti mediante φ che, essendo lineare, è continua.
Consideriamo la riflessione

$$R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \text{t.c.} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad R(x) = -x \ .$$

R è un isomorfismo avente se stesso come inverso, quindi R è un omeomorfismo (per quanto ricordato sopra). Allora basta provare che $R(A) = B$: in tal caso, infatti, $(R_{|A})_{\#} : A \to B$ è un omeomorfismo tra A e B. Ma ciò è vero in quanto:

$$\begin{aligned} y \in R(A) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists x \in A \text{ t.c. } y = R(x) = -x \ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \varphi(x) > 0 \text{ e } y = -x \ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi(y) = -\varphi(x) < 0 \Leftrightarrow \ y \in B. \end{aligned}$$

(b) Sia $F : \mathbb{R}^n \to X$ tale che $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$F(x) = \begin{cases} z_0 & \text{se } \varphi(x) < 0 \\ z_1 & \text{se } \varphi(x) = 0 \\ z_2 & \text{se } \varphi(x) > 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad F(x) = \begin{cases} z_0 & \text{se } x \in B \\ z_1 & \text{se } x \in ker\varphi \\ z_2 & \text{se } x \in A \end{cases}$$

Proviamo che F è continua su $A \cup B$, ma non su $ker\varphi$.

- Sia $x_0 \in A$ e sia $V \subset X$ un intorno di $F(x_0) = z_2$. Allora $\varphi(x_0) > 0$ e, poichè φ è continua, per il Teorema di permanenza del segno, esiste

$U \subset \mathbb{R}^n$ intorno di x_0 tale che $\forall x \in U$ $\varphi(x) > 0$. Quindi $\forall x \in U$ $F(x) = z_2 \in V$, cioè $F(U) \subset V$. E ciò prova che F è continua in x_0.

- Analogamente si prova che F è continua in ogni punto $x_0 \in B$.

- Sia ora $x_0 \in ker\varphi$ e supponiamo per assurdo che F sia continua in x_0. Poichè (X, τ) è di Hausdorff e $z_0, z_1, z_2 \in X$ sono distinti, esiste V intorno di $z_1 = F(x_0)$ che non contiene z_0 e z_2. Allora, per la continuità di φ in x_0, in corrispondenza di V esiste un intorno U di x_0 tale che $F(U) \subset V$. Tuttavia, poichè $\varphi \neq 0$, $ker\varphi$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione strettamente minore di n, per cui $ker\varphi$ ha interno vuoto e di conseguenza U non può essere interamente contenuto in $ker\varphi$. Ne consegue che $\exists x \in U$ tale che $x \notin ker\varphi$, ossia tale che $x \in A$ oppure $x \in B$ (essendo $X = A \cup B \cup ker\varphi$ unione disgiunta). Pertanto $F(x) = z_0$ oppure $F(x) = z_2$; ma ciò è assurdo in quanto $F(x) \in V$, mentre $z_0, z_2 \notin V$.

$\square$

ESERCIZIO (9/2/2018)

Siano (X, τ) e (Y, τ') due spazi topologici e sia $f : X \to Y$ un'applicazione, non necessariamente continua. Si denoti con Γ_f il grafico di f, ovvero

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y \ .$$

(a) Provare che se f è surgettiva e Γ_f è connesso o compatto, tale è Y.
(b) Assumendo che f sia ingettiva e che Y sia T_2, provare che:

$$\Gamma_f \text{ è compatto} \ \Rightarrow \ \Gamma_f \text{ è } T_2$$

Svolgimento. (a) Sia $p_2 : X \times Y \to Y$ la proiezione sul secondo fattore tale che $(x, y) \mapsto y$ e osserviamo che:

$$\begin{aligned} p_2(\Gamma_f) &= \{p_2(x, y) \mid (x, y) \in \Gamma_f\} = \\ &= \{p_2(x, f(x)) \mid x \in X\} = \\ &= \{f(x) \mid x \in X\} = f(X) = Y \end{aligned}$$

ove l'ultima uguaglianza segue dalla surgettività di f.
Dunque Y è immagine di Γ_f mediante l'applicazione continua p_2. Pertanto se Γ_f è compatto o connesso, tale è Y.

(b) Consideriamo la proiezione p_2 ristretta al grafico di f:

$$p_2 : \Gamma_f \to Y \quad \text{t.c.} \quad (x, f(x)) \mapsto f(x) \ .$$

Poichè f è ingettiva, anche p_2 lo è. Infatti se $(x, f(x)) \neq (y, f(y))$, allora $x \neq y$ oppure $f(x) \neq f(y)$; ma anche nel primo caso, per l'ingettività di f, si ha $f(x) \neq f(y)$.
Inoltre $p_2(\Gamma_f) \subset Y$, essendo sottospazio di uno spazio di Hausdorff, è anch'esso di Hasudorff.
Pertanto l'applicazione ridotta $p_2 : \Gamma_f \to p_2(\Gamma_f)$ è bigettiva e continua da uno spazio compatto in uno spazio di hausdorff, quindi è un omeomorfismo.
In definitiva Γ_f è T_2 perchè omeomorfo a uno spazio T_2.

Osservazione: Si noti che, nelle stesse ipotesi del punto (b), Γ_f è sempre T_2 (cioè anche quando Γ_f non è compatto).
Infatti, se $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ sono due punti distinti di Γ_f, dall'ingettività di f segue che $f(x) \neq f(y)$ (come sopra). Allora, poichè Y è T_2, esistono $V_1, V_2 \subset Y$ intorni disgiunti di $f(x)$ e $f(y)$ rispettivamente. Allora si considerano

$$U_1 := X \times V_1 \quad \text{e} \quad U_2 := X \times V_2$$

intorni di $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ in $X \times Y$ rispettivamente, tali che

$$U_1 \cap U_2 = (X \times V_1) \cap (X \times V_2) = X \times (V_1 \cap V_2) = X \times \emptyset = \emptyset.$$

Pertanto $U_1 \cap \Gamma_f$ e $U_2 \cap \Gamma_f$ sono intorni disgiunti in Γ_f di $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ rispettivamente; e ciò prova che Γ_f è T_2.

$\square$

ESERCIZIO (11/4/2018)
Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia A un aperto di X.
(a) Provare che $Int(Fr(A)) = \emptyset$.
(b) Si ponga $C = \overline{A}$. Provare che se E è un sottoinsieme di $Fr(A)$, si ha:

$$\overline{C \setminus E} = C \ .$$

Svolgimento. (a) Ricordiamo che $x \in Fr(A) \Leftrightarrow$ per ogni U intorno di x $U \cap A$ e $U \cap A^C = \emptyset$ (*).
Se per assurdo esistesse $x_0 \in Int(Fr(A)) \subset Fr(A)$, allora esisterebbe V intorno di x_0 tale che $V \subset Fr(A)$. Ma poichè A è aperto, $A \cap Fr(A) = \emptyset$, per cui anche $A \cap V = \emptyset$. Quindi V sarebbe un intorno di $x_0 \in Fr(A)$ tale che $V \cap A = \emptyset$, contro (*). Pertanto $Int(Fr(A)) = \emptyset$.

(b) <u>1° MODO</u>: Poichè A è aperto, $C = \overline{A}$ si scrive come unione disgiunta di A e della sua frontiera:

$$C = A \cup Fr(A) \ .$$

Allora, considerato $E \subset Fr(A)$, si ha:

$$C \setminus E = (A \cup Fr(A)) \setminus E = A \cup (Fr(A) \setminus E) \ .$$

Passando alle chiusure:

$$\overline{C \setminus E} = \overline{A \cup (Fr(A) \setminus E)} = \overline{A} \cup \overline{Fr(A) \setminus E} = C \cup \overline{(Fr(A) \setminus E)} = C \ ,$$

ove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $Fr(A) \setminus E \subset Fr(A) \subset C$, quindi $\overline{(Fr(A) \setminus E)} \subset \overline{C} = C$ (essendo C chiuso).

2° MODO: Proviamo l'uguaglianza provando la doppia inclusione:

($\subset$) Ovvia: $C \setminus E \subset C \ \Rightarrow \ \overline{C \setminus E} \subset \overline{C} = C$ (perchè C è chiuso).

($\supset$) Sia $x \in C$. Per una caratterizzazione della chiusura di un insieme:

$$x \in \overline{C \setminus E} \ \Leftrightarrow \ \forall U \text{ intorno di } x : \ U \cap (C \setminus E) \neq \emptyset.$$

Osserviamo allora che, essendo $x \in C = \overline{A}$, per ogni U intorno di x risulta $U \cap A \neq \emptyset$. Allora, procedendo come all'inizio del "1° MODO" si vede che $C \setminus E \subset A \cup (Fr(A) \setminus E)$. Segue che $A \subset C \setminus E$, e quindi ogni intorno U di x si ha che $U \cap A \subset U \cap (C \setminus E) \neq \emptyset$. Dunque $x \in \overline{C \setminus E}$.

□

ESERCIZIO (7/6/2018)
(a) Stabilire che i seguenti sottospazi X e Y di $\mathbb{R}^3$ non sono omeomorfi:

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\} \ , \quad Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1\} \ .$$

(b) Sia E un sottoinsieme di uno spazio topologico (X, τ) e si assuma che esistano un punto x interno ad E e un punto y esterno ad E, appartenenti ad una stessa componente connessa di X. Provare che $Fr(E) \neq \emptyset$.

Svolgimento. (a) *IDEA*: Le equazioni $z = x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, che definiscono rispettivamente gli insiemi X e Y, descrivono due superfici quadriche nello spazio affine Euclideo $\mathbb{R}^3$: più precisamente, la prima rappresenta un paraboloide ellittico e la seconda un iperboloide ellittico (a due falde). Dalle figure che seguono, si vede immediatamente che X e Y non possono essere omeomorfi in quanto X è connesso, mentre Y non lo è, essendo costituito da due componenti connesse (le due falde, appunto).

Cerchiamo di giustificare formalmente questa idea.

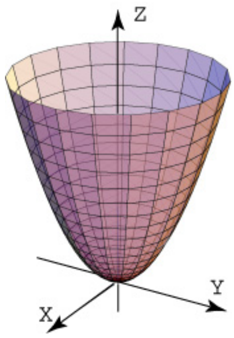


Figura 1: Paraboloide ellittico

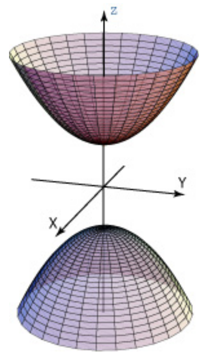


Figura 2: Iperboloide ellittico

- Per quanto riguarda X, osserviamo che

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2+y^2\} = \{(x, y, x^2+y^2) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = f(\mathbb{R}^2)$$

avendo posto $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$. Allora, poichè le funzioni componenti di f sono continue, anche f lo è. Pertanto X è connesso perchè immagine del connesso $\mathbb{R}^2$ mediante la funzione continua f.

- Per quanto riguarda Y, invece, osserviamo che

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1 \;\Leftrightarrow\; z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + 1}\;.$$

Pertanto, posto

$$Y_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\;\}$$
$$Y_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -\sqrt{x^2 + y^2 + 1}\;\}\;,$$

si ha che $Y = Y_+ \cup Y_-$. Chiaramente si tratta di un'unione disgiunta in quanto i punti di Y_+ hanno la terza cordinata strettamente positiva mentre quelli di Y_- hanno la terza coordinata strettamente negativa. Inoltre, definite le funzioni continue

$$g_\pm : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad g_\pm(x, y, z) = z \pm \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\;,$$

si ha che $Y_\pm = g_\pm^{-1}(\{0\})$, da cui segue che Y_+ e Y_- sono chiusi in $\mathbb{R}^3$, e quindi in Y. In definitiva, essendo unione disgiunta di chiusi, Y è sconnesso.

(b) Dato $E \subset X$, sappiamo che $X = Int(E) \cup Fr(E) \cup Est(E)$. Per ipotesi $x \in Int(E)$ e $y \in Est(E)$, quindi $Int(E)$ e $Est(E)$ sono aperti, disgiunti e non vuoti. Allora, se per assurdo fosse $Fr(E) = \emptyset$, X sarebbe sconnesso e

x e y apparterrebbero a due componenti connesse diverse, contro l'ipotesi. $\square$

ESERCIZIO (26/6/2018)
(a) Sia X uno spazio topologico compatto e si assuma che ogni punto $x \in X$ ammetta un intorno connesso. Provare che le componenti connesse di X sono in numero finito.
(b) Sia Y uno spazio discreto. Provare che, se p, q sono punti distinti di Y, non esiste alcun arco $\gamma : [0,1] \to Y$ tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.

Svolgimento. (a) Per ogni punto $x \in X$ denotiamo con C_x la componente connessa cui x appartiene. Inoltre, per ipotesi, x appartiene anche ad un suo intorno connesso V_x, che necessariamente deve essere contenuto in C_x (essendo C_x il più grande connesso contenente x). Pertanto $x \in Int(C_x)$ e, al variare di $x \in X$, $\{Int(C_x)\}_{x \in X}$ costituisce un ricoprimento aperto di X. Allora, in virtù della compattezza di X, da esso se ne può estrarre uno finito, cioè esistono $x_1, \ldots, x_k \in X$ tali che

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} Int(C_{x_i}) = \bigcup_{i=1}^{k} C_{x_i} \ .$$

A questo punto, per definizione di componente connessa (come classe di equivalenza), si ha che per ogni $x \in X$ necessariamente $C_x = C_{x_j}$ per qualche $j \in 1, \ldots, k$. Dunque le componenti connesse di X sono al più k, quindi in numero finito.

<u>NOTA</u>: Non è detto che le componenti C_{x_i} determinate col ragionamento precedente siano distinte, ma può accadere che $C_{x_i} = C_{x_j}$ per qualche $i, j \in 1, \ldots, k$ (cioè che x_i, x_j appartengano alla stessa componente connessa). Il che giustifica perchè le componenti connesse di X siano *al più* k e non *esattamente* k. Tuttavia questo è ininfluente ai fini di ciò che volevamo provare, ossia che le componenti connesse di X sono in numero finito.

(b) <u>1° MODO</u>: Sia Y uno spazio topologico discreto. Allora per ogni $y \in Y$ l'insieme $\{y\}$ è aperto e chiuso in Y. Quindi le componenti connesse di Y sono tutti e soli gli insiemi ridotti ad un solo punto (cioè Y è totalmente sconnesso).
Siano ora $p, q \in Y$, con $p \neq q$, e sia $\gamma : [0,1] \to Y$ un arco di punto iniziale p, cioè tale che $\gamma(0) = p$. Poichè γ è continua e $[0,1]$ è connesso, $\gamma([0,1])$ è connesso in Y, quindi è contenuto nella componente connessa di Y contenente $p = \gamma(0)$. Ma, per quanto osservato sopra tale componente connessa è ridotta a $\{p\}$. Segue che $\gamma([0,1]) = \{p\}$, cioè γ è un cammino costante e

$\gamma(1) = p \neq q$. Dunque, effettivamente, non esiste alcun arco $\gamma : [0,1] \to Y$ tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.

2° MODO: Siano $p, q \in Y$, con $p \neq q$, e sia $\gamma : [0,1] \to Y$ un arco tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Poichè Y è discreto, $\{p\}$ è aperto e chiuso in Y. Allora, essendo $\gamma : [0,1] \to Y$ un'applicazione continua, $\gamma^{-1}(\{p\})$ è aperto e chiuso in $[0,1]$ e non vuoto ($0 \in \gamma^{-1}(\{p\})$). Allora, poichè $[0,1]$ è connesso, si ha che $\gamma^{-1}(\{p\}) = [0,1]$, ed in particolare $\gamma(1) = p \neq q$, contro l'ipotesi. Dunque non esiste alcun arco $\gamma : [0,1] \to Y$ tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.

$\square$

ESERCIZIO (11/7/2018)

(a) Data un'ellisse $\mathcal{C}$ del piano Euclideo $\mathbb{R}^2$, si denoti con X l'insieme dei punti $P \in \mathbb{R}^2$ per cui passa almeno una retta t tangente a $\mathcal{C}$.
Provare che X è connesso. Dire se X è compatto.
(b) Si consideri una famiglia $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di spazi topologici tali che:

$$X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset \quad \forall \alpha, \beta \in I, \ \text{con } \alpha \neq \beta \ .$$

Posto $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$, si consideri la topologia τ su X definita da:

$$A \in \tau \ \Leftrightarrow \ A \cap X_\alpha \text{ è apero in } X_\alpha \ .$$

Provare che se tutti gli spazi X_α sono di Hausdorff, tale è (X, τ).

Svolgimento. (a) Sia $\mathcal{C}$ un'ellisse in $\mathbb{R}^2$ e supponiamo che abbia equazione $\mathcal{C} : p(x,y) = 0$, ove

$$p(x,y) := a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} \ ,$$

con $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$.
$\mathcal{C}$ è una curva chiusa e denotiamo con C la regione di piano da essa delimitata:

$$C := \{(x,y) \mid p(x,y) < 0\} \ .$$

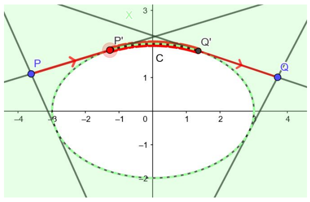
Allora, poichè è noto che i punti del piano dai quali è possibile condurre almeno una tangente a $\mathcal{C}$ sono quelli di $\mathcal{C}$ e quelli esterni a $\mathcal{C}$, abbiamo che

$$X = \mathbb{R}^2 \setminus C = \{(x,y) \mid p(x,y) \geq 0\} \ .$$

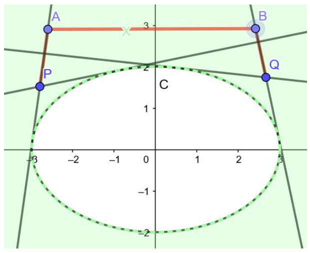
Segue immediatamente che X non è compatto, non essendo limitato. Infatti X è complementare in $\mathbb{R}^2$ di C che è limitato.
Per quanto riguarda la connessione, invece, si può procedere in due modi.

<u>1° MODO</u>: Si dimostra che X è connesso per archi. Siano $P, Q \in X$: per determinare un cammino da P a Q contenuto in X si può procedere in vari modi. A titolo di esempio ne illustriamo tre:

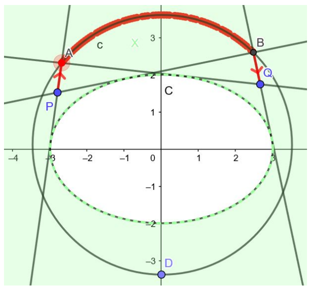
- Si considerino due tangenti t_1 e t_2 condotte da P e Q rispettivamente e siano P', Q' i relativi punti di tangenza. Poichè $\mathcal{C}$ è connessa per archi (essendo $\mathcal{C} \cong \mathbb{S}^1$), esiste un arco γ da P' a Q'. Allora giustapponendo il segmento $[P, P']$, l'arco γ e il segmento $[Q, Q']$ si ottiene un cammino da P a Q interamente contenuto in X.



- Si considerino due tangenti t_1 e t_2 condotte da P e Q rispettivamente e siano A e B due punti su t_1 e t_2 rispettivamente, in modo che il segmento $[A, B]$ sia interamente contenuto in X. Allora la poligonale $[P, A, B, Q]$ è un cammino da P a Q contenuto in X.



- Si consideri una circonferenza $\mathscr{C}$ di raggio r sufficientemente grande e centro opportuno x_0, in modo che l'ellisse $\mathcal{C}$ sia contenuta nel disco $D_r(x_0)$. Allora, dette t_1 e t_2 due tangenti a $\mathcal{C}$ condotte da P e Q rispettivamente, esse intersecano $\mathscr{C}$ in (almeno) due punti A e B. Quindi, detto γ un arco su $\mathscr{C}$ da A a B, il cammino ottenuto giustapponendo $[P, A]$, γ e $[B, Q]$ si ottiene un arco da P a Q interamente contenuto in X.



<u>2° MODO</u>: Si può dimostrare che X è connesso in modo diretto. Siano $P, Q \in X$: come prima consideriamo due tangenti t_1, t_2 condotte da Pe Q rispettivamente. Allora P e Q appartengono entrambi ad

$$E := t_1 \cup t_2 \cup \mathcal{C} \ .$$

A questo punto basta osservare che $E \subset X$ ed E è connesso: infatti, le rette t_1, t_2 sono immagini di $\mathbb{R}$ mediante un'opportuna parametrizzazione continua e $\mathcal{C}$ è omeomorfa a $\mathbb{S}^1$; quindi E è connesso perchè unione di connessi tali che t_1 e t_2 hanno entrambe intersezione non vuota con $\mathcal{C}$.
In definitiva, per ogni coppia di punti $P, Q \in X$ esiste un connesso $E \subset X$ che li contiene, e ciò prova che X è connesso.

(b) Prima di provare l'asserto conviene osservare che se $A \subset X_\alpha$ è un aperto di X_α, allora A è anche un aperto di X. Infatti, poichè gli spazi topologici

$\{X_\beta\}_{\beta\in I}$ sono a due a due disgiunti, si ha che

$$A \cap X_\beta = \begin{cases} A & \text{se } \beta = \alpha \\ \emptyset & \text{se } \beta \neq \alpha \end{cases}$$

In ogni caso si ha che $A \cap X_\beta$ è aperto in X_β, per ogni $\beta \in I$. Quindi, dalla definizione della topologia τ su X segue che A è aperto in X. In particolare, applicando questo ragionamento ad $A = X\alpha$, deduciamo anche che ogni X_α è aperto in X.

Ora, siano $x, y \in X$, con $x \neq y$, due generici punti distinti di X. A norma di definizione, per provare che X è di Hausdorff basta provare che esistono $U, V \subset X$ intorni aperti disgiunti di x e y rispettivamente.

Dalla definizione di X segue che esistono $\alpha, \beta \in I$ tali che $x \in X_\alpha$ e $y \in X_\beta$. Distinguiamo allora i seguenti due casi:

- Se $\alpha \neq \beta$ basta scegliere $U = X_\alpha$ e $V = X_\beta$. Infatti, per quanto osservato sopra, X_α e X_β sono intorni aperti in X di x e y rispettivamente e, per ipotesi, sono disgiunti.

- Se $\alpha = \beta$, allora $x, y \in X_\alpha$. Ma per ipotesi X_α è di Hausdorff, quindi esistono $U, V \subset X_\alpha$ intorni aperti in X_α di x e y rispettivamente tali che $U \cap V = \emptyset$. A questo punto, grazie alle considerazioni iniziali, basta osservare che U e V sono aperti anche in X.

$\square$

ESERCIZIO (5/9/2018)

Per ogni A, B sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, si ponga:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Si consideri inoltre $\mathbb{R}^n$ munito della topologia naturale.

(a) Verificare che per ogni $b \in \mathbb{R}^n$, l'applicazione $\tau_b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definita da

$$\tau_b(x) := x + b$$

è un omeomorfismo.

(b) Provare che se A oppure B è aperto, allora anche $A + B$ è aperto.

(c) Verificare che, per ogni sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^n$ risulta

$$\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} (A + U)$$

dove $\mathfrak{U}$ denota la famiglia di tutti gli intorni di $(0, \ldots, 0)$.

Svolgimento. (a) È immediato verificare che per ogni $b \in \mathbb{R}^n$ τ_b è una bigezione con inversa τ_{-b}. Allora, per provare che τ_b è un omeomorfismo è sufficiente provare che τ_b è continua: in tal caso, infatti, data l'arbitrarietà di $b \in \mathbb{R}^n$, anche τ_{-b} è continua, perchè dello stesso tipo.
Se $b = (b_1, \ldots, b_n)$, per ogni $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\tau_b(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + b_1, \ldots, x_n + b_n) \ ,$$

quindi, poichè tutte le funzioni componenti sono continue (perchè polinomi), anche τ_b è continua.

(b) Supponiamo che A sia aperto. Osserviamo che

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\} = \bigcup_{b \in B} \{a + b \mid a \in A\} = \bigcup_{b \in B} \tau_b(A) \ .$$

Allora, poichè A è aperto e le traslazioni τ_b sono omeomorfismi, per ogni $b \in B$ $\tau_b(A)$ è aperto e quindi $A + B$ è aperto perchè unione di aperti.
Analogamente se B è aperto (basta scambiare i ruoli di A e B).

(c) Si ricordi che, dato un insieme A,

$$x \in \overline{A} \ \Leftrightarrow \ \text{per ogni } V \text{ intorno di } x : \ V \cap A \neq \emptyset \ .$$

Tornando alla situazione in esame, osserviamo, inoltre, che gli intorni di un punto $x \in \mathbb{R}^n$ sono tutti e soli gli intorni dell'origine $0 = 0_{\mathbb{R}^n}$, traslati del vettore x. Quindi:

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} \ &\Leftrightarrow \ \forall V \text{ intorno di } x : \ V \cap A \neq \emptyset \ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ \forall U \text{ intorno di } 0 : \ (U + x) \cap A \neq \emptyset \ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ \forall U \in \mathfrak{U} : \ (U + x) \cap A \neq \emptyset \end{aligned}$$

ove $U + x = \tau_x(U) = \{u + x \mid u \in U\}$ e

$$\begin{aligned} (U + x) \cap A \neq \emptyset \ &\Leftrightarrow \ \exists a \in A \text{ t.c. } a \in U + x \ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ \exists a \in A, \ \exists b \in U \text{ t.c. } a = b + x \ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ \exists a \in A, \ \exists b \in U \text{ t.c. } x = a - b \qquad (*) \end{aligned}$$

Ora, poichè gli intorni sferici di 0 costituiscono un sistema fondamentale di intorni di 0, a meno di sostituire U con un intorno sferico di 0 contenente U, non si lede la generalità assumendo che se $b \in U$, allora anche $-b \in U$ (vedi Osservazione). Pertanto, ponendo $u := -b \in U$ in (*), la stessa (*) si può riscrivere in modo equivalente come:

$$(U + x) \cap A \neq \emptyset \ \Leftrightarrow \ \exists a \in A, \ \exists u \in U \text{ t.c. } x = a + u \ .$$

Ricapitolando, abbiamo che:

$$\begin{aligned}\overline{A} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall U \in \mathfrak{U}\ (U+x) \cap A \neq \emptyset\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall U \in \mathfrak{U} \quad \exists a \in A, \exists u \in U \text{ t.c. } x = a+u\} = \\ &= \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} \{a+u \mid a \in A, u \in U\} = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} (A+U)\ .\end{aligned}$$

Osservazione: Per essere più rigorosi, si potrebbe osservare preliminarmente che, detto $\overline{\mathfrak{U}}$ l'insieme degli intorni sferici di 0, vale l'uguaglianza

$$\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} (A+U) = \bigcap_{U \in \overline{\mathfrak{U}}} (A+U) \qquad (**)$$

per cui ci si può limitare a considerare solo gli intorni sferici per i quali è sempre vera l'equivalenza $b \in U \Leftrightarrow -b \in U$.
Volendo quindi provare la (**), l'inclusione $\subset$ segue dal fatto che $\overline{\mathfrak{U}} \subset \mathfrak{U}$. Per quanto riguarda invece l'inclusione opposta, poichè $\overline{\mathfrak{U}}$ è un sistema fondamentale di intorni di 0,

$$\forall U \in \mathfrak{U} \quad \exists B \in \overline{\mathfrak{U}} \quad \text{t.c. } B \subset U, \text{ e quindi } (A+B) \subset (A+U)\ .$$

Ma poichè $\bigcap_{V \in \overline{\mathfrak{U}}} (A+V) \subset (A+B)$, si ha che, per ogni $U \in \mathfrak{U}$, $\bigcap_{V \in \overline{\mathfrak{U}}} (A+V) \subset (A+U)$, ossia che $\bigcap_{V \in \overline{\mathfrak{U}}} (A+V) \subset \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} (A+U)$, come volevamo.

$\square$

ESERCIZIO (20/9/2018)

Sia (X, τ) uno spazio topologico <u>*localmente compatto*</u>*, nel senso che ogni punto di X ammette un intorno compatto.*
Provare che:
(a) Ogni sottospazio chiuso C di X è a sua volta localmente compatto.
(b) Si assuma che X sia anche di Hausdorff. Provare che ogni punto x ammette un sistema fondamentale di intorni $\mathcal{V}(x)$ tale che, per ogni $V \in \mathcal{V}(x)$, $\overline{V}$ è compatta.

Svolgimento. (a) Sia $C \subset X$ un sottospazio chiuso. Sia $x \in C \subset X$ e sia $K \subset X$ un intorno compatto di x in X. Allora $C \cap K$ è un intorno di x, chiuso nel compatto K (per definizione di topologia indotta su K), quindi compatto.

(b) Supponiamo che X sia di Hausdorff e sia $x \in X$. Per provare che x

ammette un sistema fondamentale di intorni a chiusura compatta, occorre provare che

$$\forall U \text{ intorno di } x \quad \exists V \text{ intorno di } x \quad \text{t.c.} \quad V \subset U \quad \text{e} \quad \overline{V} \text{ è compatto.}$$

Sia dunque U intorno di x. Poichè X è localmente compatto, x possiede un intorno compatto K. Allora $V := U \cap K$ è intorno di x tale che $V \subset U$ e $\overline{V} \subset \overline{K} = K$, poichè K è compatto in uno spazio di Hausdorff, quindi chiuso. Dunque $\overline{V}$ è chiusa nel compatto K, quindi $\overline{V}$ è compatto.

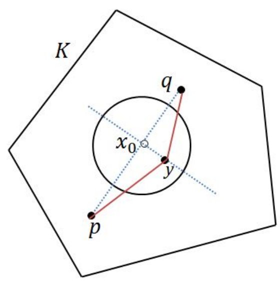
□

ESERCIZIO (13/11/2018)
Sia K un sottoinsieme convesso e non vuoto di $\mathbb{R}^2$.
(a) Provare che se $x_0 \in K$ è un punto interno di K, allora $K \setminus \{x_0\}$ è connesso.
(b) Mostrare con un esempio che se x_0 non è un punto interno di K, può accadere che $K \setminus \{x_0\}$ sia sconnesso.

Svolgimento. (a) Sia x_0 un punto interno a K e proviamo che $K \setminus \{x_0\}$ è connesso mostrando che è connesso per archi. Siano dunque $p, q \in K \setminus \{x_0\}$ e distinguiamo due casi.

1. Se p, q e x_0 non sono allineati, allora, considerato il segmento $[p, q]$ congiungente p e q, si ha che $x_0 \notin [p, q]$ e $[p, q] \subset K$ perchè K è convesso. Quindi $[p, q]$ è un arco congiungente p e q, interamente contenuto in $K \setminus \{x_0\}$.

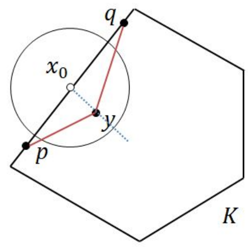
2. Supponiamo ora che p, q e x_0 siano allineati: in tal caso $x_0 \in [p, q]$, per cui $[p, q] \not\subset K \setminus \{x_0\}$. Occorre quindi "aggirare l'ostacolo x_0".
Poichè $\{x_0\}$ è punto interno a K e poichè i dischi aperti di centro x_0 formano un sistema fondamentale di intorni di x_0, esiste $\varepsilon > 0$ (sufficientemente piccolo) tale che $D_\varepsilon(x_0) \subset K$.
Consideriamo allora un punto $y \in D_\varepsilon(x_0) \subset K$, con $y \neq x_0$, in modo che p, q e y non siano allineati (ad esempio basta scegliere y sulla retta perpendicolare a $[p, q]$ e passante per x_0). Ragionando come nel punto 1, si ha che i segmenti $[p, y]$ e $[y, q]$ sono interamente contenuti in $K \setminus \{x_0\}$. Pertanto la poligonale $[p, y, q]$ ottenuta giustapponendo i segmenti $[p, y]$ e $[y, q]$ è un arco da p a q, interamente contenuto in $K \setminus \{x_0\}$.



In definitiva, per ogni coppia di punti $p, q \in K \setminus \{x_0\}$ si riesce sempre a costruire un arco che li congiunga e che sia contenuto in $K \setminus \{x_0\}$. Pertanto

$K \setminus \{x_0\}$ è connesso per archi, quindi è connesso.

(b) <u>*IDEA*</u>: Dal caso 2 del punto (a) si intuisce che se K è un insieme convesso con interno non vuoto, anche se x_0 non fosse un punto interno, bensì di frontiera, $K \setminus \{x_0\}$ risulterebbe ancora connesso. E questo perchè, se $x_0 \in Fr(K)$, allora per ogni $r > 0$ si ha che $D_r(x_0) \cap K \neq \emptyset$, o meglio $D_r(x_0) \cap \mathring{K} \neq \emptyset$. Quindi, per ogni coppia di punti $p, q \in K$ tali che p, q e x_0 sono allineati, basta fissare un $r > 0$ e un punto $y \in D_r(x_0) \cap \mathring{K}$ in modo che la poligonale $[p, y, q] \subset K \setminus \{x_0\}$.



Pertanto, sembrerebbe che per trovare un esempio del tipo richiesto dalla traccia, sia necessario considerare sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}^2$ con interno vuoto. Allora, poichè $\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale, una classe di tali sottoinsiemi è costituita dai sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ di dimensione strettamente minore di 2, cioè di dimensione 1, quindi le rette.

Alla luce di queste considerazioni consideriamo come insieme convesso K l'asse x:

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Poichè K ha interno vuoto, comunque si scelga $x_0 \in K$, x_0 non è un punto interno a K. Inoltre $K = \mathbb{R} \times \{0\}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}$ il quale viene sempre sconnesso da un punto (cioè per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta che $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ è sconnesso). Quindi anche $K \setminus \{x_0\}$ è sconnesso per ogni $x_0 \in K$, come volevamo.

$\square$

ESERCIZIO (8/1/2019)

(a) Sia (X, τ) uno spazio topologico compatto e sia $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di chiusi tutti non vuoti, tali che

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad C_{n+1} \subset C_n \qquad (*)$$

Provare che:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset \; . \qquad (**)$$

(b) Provare che la (**) è vera anche se i C_n sono chiusi tutti non vuoti di $\mathbb{R}^2$ soddisfacenti ancora la (*) e l'ulteriore condizione:

$$\|x - y\| < 1, \quad \forall x, y \in C_0.$$

Svolgimento. (a) Supponiamo per assurdo che (**) non sia vera, cioè che $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \emptyset$. Allora, passando ai complementari, si ha che

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^C \ ,$$

ove per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\ C_n^C := X \setminus C_n$ è aperto in X. Quindi $\{C_n^C\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento aperto di X, e poichè X è compatto, ne esiste un sottoricoprimento finito, cioè esistono $k \in \mathbb{N}^*$ ed esistono $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, con $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, tali che

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} C_{n_i}^C = C_{n_k}^C \ , \qquad (1)$$

ove la seconda uguaglianza segue dal fatto che $\forall n \in \mathbb{N}: \ C_{n+1} \subset \ C_n$ (per ipotesi), da cui, passando ai complementari, $C_n^C \subset C_{n+1}^C$.
Allora da (1) segue che $C_{n_k} = \emptyset$, contro l'ipotesi. Dunque, poichè l'assurdo è nato dall'aver supposto falsa la (**), si ha che $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.

(b) Poichè $C_0 \neq \emptyset$, fissato $\overline{x} \in C_0$, dall'ipotesi aggiuntiva segue che $\forall y \in C_0 : \ \|\overline{x} - y\| < 1$, cioè $y \in D_1(\overline{x})$ (disco di centro $\overline{x}$ e raggio 1). Dunque, per l'arbitrarietà di $y \in C_0$, si ha che $C_0 \subset D_1(\overline{x})$ è limitato.
Essendo anche chiuso (in $\mathbb{R}^2$), C_0 è compatto per il Teorema di Heine-Borel.
Allora la tesi segue applicando il punto (a) alla successione $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di chiusi nello spazio topologico compatto (C_0, τ') (ove τ' denota la topologia indotta su C_0 dalla topologia naturale di $\mathbb{R}^2$).

$\square$

ESERCIZIO (24/1/2019)
Sia (X, τ) uno spazio topologico e si assuma

$$X = \bigcup_{i\in\mathbb{R}} A_i \qquad (*)$$

dove ciascun A_i è un aperto di X tale che $A_i \neq \emptyset$ e

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ per ogni } i, j \in \mathbb{R} \text{ tali che } i \neq j. \qquad (**)$$

(a) Mostrare che (X, τ) non soddisfa il secondo assioma di numerabilità.
(b) Dare un esempio di spazio (X, τ) che ammetta un ricoprimento (*) con la stessa proprietà (**) e soddisfacente il primo assioma di numerabilità.

Svolgimento. (a) Ricordiamo anzitutto che uno spazio topologico soddisfa il secondo assioma di numerabilità se e solo se possiede una base numerabile.

Si tratta quindi di provare che ogni base di (X, τ) possiede una quantità più che numerabile di insiemi aperti.
Sia dunque $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una base di (X, τ). Poichè ogni aperto non vuoto di (X, τ) si può scrivere come unione di elementi della base $\mathcal{B}$, per ogni $i \in \mathbb{R}$ esiste un sottoinsieme $\Lambda_i \subset \Lambda$, con $\Lambda_i \neq \emptyset$, tale che $A_i = \bigcup_{\alpha \in \Lambda_i} B_\alpha$.
Ora, poichè gli A_i sono a due a due disgiunti, anche i Λ_i lo sono. Inoltre

$$\bigcup_{i \in \mathbb{R}} \Lambda_i \subset \Lambda \ .$$

Quindi Λ contiene l'unione disgiunta di una famiglia di insiemi non vuoti avente la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$, cioè la cardinalità del continuo. Quindi Λ non può essere numerabile, cioè $\mathcal{B}$ non è una base numerabile di (X, τ).
Dall'arbitrarietà di $\mathcal{B}$ segue che (X, τ) non soddisfa il secondo assioma di numerabilità.

(b) Ricordiamo che uno spazio topologico $(X\tau)$ soddisfa il primo assioma di numerabilità se ogni punto di X ammette un sistema fondamentale di intorni numerabile.
Si consideri, allora, $\mathbb{R}$ munito della topologia discreta $\tau := \mathcal{P}(\mathbb{R})$: $(\mathbb{R}, \tau)$ soddisfa il primo assioma di numerabilità in quanto per ogni $x \in \mathbb{R}$ la famiglia $\{\{x\}\}$ è un sistema fondamentale di intorni di x finito, quindi numerabile.
Inolte $(\mathbb{R}, \tau)$ ammette un ricoprimento (*) con la stessa proprietà (**) in quanto possiamo scrivere $\mathbb{R}$ nella forma

$$\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\} \ ,$$

ove, al variare di $x \in \mathbb{R}$, gli insiemi $A_x := \{x\}$ sono aperti (non vuoti) in τ e a due a due disgiunti.

$\square$

ESERCIZIO (8/2/2019)
Sia $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ un omeomorfismo tra due spazi topologici.
(a) Mostrare che, se $C \subset X$ è una componente connessa di X, allora $f(C)$ è una componente connessa di Y.
(b) Mostrare con un esempio che questa proprietà non sussiste se f è solo un'applicazione continua.

Svolgimento. (a) Sia C una componente connessa di X. Poichè $f : X \to Y$ è continua, $f(C)$ è un sottoinsieme connesso di Y, quindi è contenuto in una componente connessa K di Y. D'altra parte, poichè f è un omeomorfismo, f^{-1} è continua, quindi $f^{-1}(K)$ è connesso in X. Ora:

$$f(C) \subset K \ \Rightarrow \ C \subset f^{-1}(K) \ .$$

Pertanto, essendo C una componente connessa, C è il più grande connesso (per inclusione) contenente un suo punto, e quindi $f^{-1}(K) = C$. Segue che $f(C) = K$ è una componente connessa di Y.

Osservazione: Con l'ipotesi aggiuntiva che il numero di componenti connesse di (X, τ) sia finito, si può procedere nel seguente modo alternativo. Dette $\{C_i\}_{i=1}^n$ le componenti connesse di X, sappiamo dalla teoria che esse sono chiuse in X. Inoltre, poichè X è unione disgiunta delle sue componenti connesse, fissata una componente connessa C_k, si ha che $C_k = X \setminus \bigcup_{i \neq k} C_i$, cioè C_k è aperto perchè complementare di un'unione finita di chiusi. In definitiva C_k è aperto e chiuso in X. Allora, se f è un omeomorfismo, f è continua, aperta e chiusa, quindi $f(C_k)$ è connesso, aperto e chiuso in Y, cioè è una componente connessa di Y.

(b) Consideriamo $(X, \tau) = (Y, \tau) = (\mathbb{R}, \tau_0)$ (con τ_0 topologia Euclidea) e, fissato $p \in \mathbb{R}$, sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = p$.
Chiaramente f è continua (perchè costante), ma non è un omeomorfismo non essendo ingettiva. Inoltre, poichè $(\mathbb{R}, \tau_0)$ è connesso, $\mathbb{R}$ è l'unica sua componente connessa. Ma $f(\mathbb{R}) = \{p\} \subsetneqq \mathbb{R}$, cioè l'immagine dell'unica componente connessa di $\mathbb{R}$ mediante f è connessa, ma non è una componente connessa.

□

ESERCIZIO (4/4/2019)
Sia (X, τ) uno spazio topologico, dove X è un insieme finito.
(a) Mostrare che per ogni punto $x_0 \in X$ esiste il più piccolo aperto A_{x_0} per inclusione contenente x_0.
(b) Sia $f : (X, \tau) \in (X, \tau)$ un'applicazione. Provare che f è continua se e solo se per ogni $x_0 in X$ si ha $f(A_{x_0}) \subset A_{f(x_0)}$.
(c) Mostrare che ogni A_{x_0} è connesso in X.

Svolgimento. (a) Osserviamo anzitutto che, essendo X un insieme finito, anche l'insieme delle parti di X è finito, avendo cardinalità $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$. Allora, per ogni $x_0 \in X$, detto $\mathcal{U}_{x_0}$ l'insieme degli aperti contenenti x_0 (cioè degli intorni aperti di x_0), si ha che $\mathcal{U}_{x_0}$ è finito perchè $\mathcal{U}_{x_0} \subset \tau \subset \mathcal{P}(X)$. Da ciò segue immediatamente che A_{x_0} esiste ed è

$$A_{x_0} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_{x_0}} U \ .$$

Infatti, essendo intersezione finita di aperti contenenti x_0, $\bigcap_{U \in \mathcal{U}_{x_0}} U$ è ancora un aperto contenente x_0, e ovviamente è il più piccolo sottoinsieme di X per inclusione con queste proprietà.

(b) Sia $f : (X,\tau) \in (X,\tau)$ un'applicazione. Chiaramente f è continua in X se e solo se lo è in ogni punto $x_0 \in X$. Quindi proviamo che per ogni $x_0 \in X$:

$$f \text{ è continua in } x_0 \iff f(A_{x_0}) \subset A_{f(x_0)} \ .$$

($\Rightarrow$) Se f è continuain x_0, allora per ogni V intorno aperto di $f(x_0)$ esiste U intorno aperto di x_0 tale che $f(U) \subset V$. Ma poichè A_{x_0} è il più piccolo intorno aperto di x_0, si ha che $A_{x_0} \subset U$ e quindi $f(A_{x_0}) \subset V$ per ogni $V \in \mathcal{U}_{f(x_0)}$. Pertanto

$$f(A_{x_0}) \subset \bigcap_{V \in \mathcal{U}_{f(x_0)}} V = A_{f(x_0)} \ .$$

($\Leftarrow$) Supponiamo che $f(A_{x_0}) \subset A_{f(x_0)}$. Sia V un intorno aperto di $f(x_0)$: in corrispondenza di V esiste A_{x_0} intoro aperto di x_0 tale che $f(A_{x_0}) \subset A_{f(x_0)} \subset V$, essendo $A_{f(x_0)}$ il più piccolo per inclusione intorno aperto di $f(x_0)$. Dunque, data l'arbitrarietà di $V \in \mathcal{U}_{f(x_0)}$, ciò prova che f è continua in x_0.

(c) Fissato $x_0 \in X$, mostriamo che A_{x_0} è connesso in X mediante il Teorema di caratterizzazione dei sottospazi connessi.
Siano $A, B \in \tau$ tali che $A_{x_0} \subset A \cup B$ e $A_{x_0} \cap A \cap B = \emptyset$: proviamo che $A_{x_0} \cap A = \emptyset$ oppure $A_{x_0} \cap B = \emptyset$.
Osserviamo che $x_0 \in A_{x_0} \subset A \cup B$, quindi $x_0 \in A$ o $x_0 \in B$. Se $x_0 \in A$, A è un aperto contenente x_0, quindi $A_{x_0} \subset A$ (essendo A_{x_0} il più piccolo intorno aperto di x_0). Allora $A_{x_0} \cap B = A_{x_0} \cap A \cap B = \emptyset$.
Analogamente, se $x_0 \in B$ si ottiene $A_{x_0} \cap A = \emptyset$.

□