**TUTORATO DI GEOMETRIA N.3**
**Anno Accademico 2017/2018**
**Tutor: dott. Antonio De Carlo**

Nel seguente documento sono riportati gli svolgimenti di alcuni esercizi comparsi durante gli anni precedenti all' A.A. 2017/2018 nelle tracce d'esame relative al corso di Geometria N.3.
Le soluzioni proposte non rappresentano né l'unico possibile svolgimento né probabilmente il migliore in assoluto.
Come leggere l'eserciziario?
La divisione per sezioni è effettuata secondo il "layout" standard di una traccia: per "esercizi di tipo 1" intendiamo la classe degli esercizi che solitamente nelle tracce compaiono per primi (proiettività su rette geometriche proiettive e esercizi su sottospazi proiettivi numerici). Similmente definiamo le classi "esercizi di tipo 2" (esercizi generalmente sulle coniche nel piano) e "esercizi di tipo 3" (esercizi generalmente sulle quadriche).
Ogni esercizio è indicizzato mediante la data d'esame della traccia da cui proviene. L'ordine in cui sono riportate è quello cronologico.
Alla pagina successiva si trova l'indice degli esercizi proposti, provvisto di collegamento ipertestuale (cliccando sulla data, si viene riportati all'esercizio).

- **ESERCIZI DI TIPO 1**

  1. 11/02/15
  2. 03/09/15
  3. 26/01/16
  4. 22/06/16
  5. 08/07/16
  6. 17/01/17
  7. 01/02/17
  8. 16/02/17
  9. 23/06/17
  10. 21/09/17
  11. 11/04/18

- **ESERCIZI DI TIPO 2**

  1. 13/01/15
  2. 15/04/15
  3. 04/06/15
  4. 03/09/15
  5. 10/11/15
  6. 12/01/16
  7. 26/01/16
  8. 08/06/16
  9. 05/09/16
  10. 01/02/17
  11. 23/06/17

- **ESERCIZI DI TIPO 3**

1. 18/06/15
2. 12/01/16
3. 08/07/16
4. 20/09/16
5. 16/02/17
6. 07/09/17
7. 21/09/17
8. 11/04/18

# ESERCIZI DI TIPO 1

**Esercizio** (11/02/15)**.** *Sia $S_2$ un piano geometrico proiettivo reale e sia $k$ un fissato sistema coordinato. Si considerino le rette*

$$r = [A, B], s = [A_0, B_0]$$

*dove*

$$k(A) = [0, 1, 0], k(B) = [0, 1, 1], k(A_0) = [1, 0, 0], k(B_0) = [1, 0, 2].$$

*Detto $X$ il punto di intersezione tra $r$ ed $s$, mostrare che l'applicazione*

$$\omega : r \to s$$

*che associa ad ogni punto $P \in r$ il punto $\omega(P) \in s$ tale che*

$$(X\ A_0\ B_0\ \omega(P)) = 3(X\ A\ B\ P)$$

*è una trasformazione proiettiva. Stabilire se si tratta di una prospettività.*

**Svolgimento.** Si fissi su $r$ il sistema coordinato $h$ relativo ai punti $A$ e $B$. Dunque $h(A) = [1, 0]$ e $h(B) = [0, 1]$.
Analogamente, si fissi su $s$ il sistema coordinato $h'$ relativo ai punti $A_0$ e $B_0$, in cui $h'(A_0) = [1, 0]$ e $h'(B_0) = [0, 1]$.
Calcoliamo ora chi è $X$, punto di intersezione delle due rette. Nel sistema coordinato fissato, le due rette hanno equazioni date da

$$r : \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r : x = 0$$

$$s : \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow s : y = 0$$

per cui, evidentemente, $k(X) = [0, 0, 1]$.

Scriviamo le coordinate di $X$ in $h$ e in $h'$. Da

$$(0,0,1) = \alpha(0,1,0) + \beta(0,1,1) = (0, \alpha+\beta, \beta)$$

si deduce che la coppia di coefficienti che individuano il vettore che rappresenta $X$ rispetto ai vettori che rappresentanto $A$ e $B$ è $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$. Dunque

$$h(X) = [-1, 1].$$

Analogamente, da

$$(0,0,1) = \alpha(1,0,0) + \beta(1,0,2) = (\alpha+\beta, 0, 2\beta)$$

si deduce che $h'(X) = [-1, 1]$.
A questo punto, sia $P \in r$ con $h(P) = [\xi, 1]$. Se $h'(\omega(P)) = [\xi', 1]$, si deve avere

$$\frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & \xi' \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \frac{\begin{vmatrix} 1 & \xi' \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = 3 \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & \xi \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \frac{\begin{vmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

da cui si deduce che

$$\omega : \xi' = \frac{\xi - 2}{3}.$$

Visto che $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, $\omega$ è una trasformazione proiettiva. Inoltre, essa è una prospettività tra $r$ e $s$ se e solo se il punto di intersezione $X$ è un punto fisso. In effetti, essendo $\xi(X) = \xi'(X) = -1$, si ha,

$$\frac{-1-2}{3} = -1,$$

per cui $\omega(X) = X$. Dunque la risposta è affermativa.

$\square$

**Esercizio** (03/09/15)**.** *Sia $S_3$ l'estensione complessa di uno spazio geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di uno spazio Euclideo reale $E_3$ con l'aggiunta del piano improprio. Si fissi un sistema coordinato* *in $S_3$ dedotto da un riferimento ortonormale di $E_3$. Si considerino la retta*

$$r : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$$

*e i piani*

$$\alpha_1 : x - 1 = 0, \quad \alpha_2 : x + y = 0.$$

*Mostrare che esiste una ed una sola proiettività*

$$\omega : \mathfrak{F}(r) \to \mathfrak{F}(r)$$

*tale che per ogni piano $\pi$ del fascio $\mathfrak{F}(r)$ diverso da $\alpha_1$ e $\alpha_2$, $\omega(\pi)$ è il quarto armonico dopo $\alpha_1, \alpha_2$ e $\pi$, e scriverne l'equazione in un fissato sistema coordinato. Determinare i punti uniti di $\omega$ e stabilire se si tratta di un'involuzione.*

**Svolgimento.** Una volta osservato che, in effetti, $r \subset \alpha_2$ (è ovviamente contenuta in $\alpha_1$, poiché la sua equazione compare tra quelle che definiscono $r$), possiamo descrivere il fascio $\mathfrak{F} := \mathfrak{F}(r)$ mediante l'equazione

$$\mathfrak{F} : \lambda(x - 1) + \mu(x + y) = 0.$$

Nel sistema coordinato $k$ canonico sul fascio, si ha pertanto $k(\alpha_1) = [1, 0]$ e $k(\alpha_2) = [0, 1]$. Sia $\pi \in \mathfrak{F}$, con $k(\pi) = [\xi, 1]$ e $\xi \neq 0$ (piano diverso da $\alpha_1$ e $\alpha_2$). Sia $k(\omega(\pi)) = [\xi', 1]$.
Allora $\omega$, se esiste, è individuata dall'equazione

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \pi\ \omega(\pi)) = -1.$$

Si ha

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \xi' \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \xi' \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \xi \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -1 \Rightarrow \omega : \xi' = -\xi.$$

In effetti, l'equazione lineare fratta sopra riportata individua una trasformazione proiettiva in maniera univoca. Osserviamo che due punti fissi sono individuati da $\xi = 0, \infty$, ossia $\alpha_1$ e $\alpha_2$. Essendo $\omega$ diversa dall'identità, non può avere più di due punti fissi. Essi sono dunque gli unici. In tal caso, si ha che il birapporto $(\alpha_1\ \alpha_2\ \pi\ \omega(\pi))$ è proprio l'invariante assoluto di questa proiettività. Per costruzione esso è $-1$, e dunque $\omega$ è un'involuzione.
Alternitavamente si può usare una qualsiasi altra caratterizzazione delle involuzioni per giungere allo stesso risultato. □

**Esercizio** (26/01/16)**.** *Verificare che i seguenti punti di* $\mathbb{RP}^3$

$$P_1 = [0, 0, 0, 1], P_2 = [1, -1, 0, 0], P_3 = [1, -1, 0, 1], P_4 = [1, -1, 0, 2]$$

*appartengono alla medesima retta $r$ e calcolare il birapporto $(P_1\ P_2\ P_3\ P_4)$. Detta inoltre $s$ la retta passante per $Q_1 = [1, 0, 2, 0]$ e $Q_2 = [0, 0, 1, 0]$, si stabilisca se esiste una trasformazione proiettiva*

$$\omega : r \to s$$

*tale che*

$$\omega(P_1) = Q_1, \omega(P_2) = Q_2, \omega(P3) = [1, 0, 3, 0], \omega(P4) = [2, 0, 5, 0].$$

**Svolgimento.** Per verificare che i punti dati sono allineati possiamo, per esempio, trovare l'equazione della retta $r = [P_1, P_2]$ e verificare che $P_3, P_4 \in r$. Un modo più immediato è verificare che, i vettori di $\mathbb{R}^4$ che rappresentano i punti dati generano un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 2.
Detti tali vettori $v_1, v_2, v_3.v_4$, si ha chiaramente che $v_1$ e $v_2$ sono indipendenti. Inoltre,

$$v_3 = v_1 + v_2$$

e

$$v_4 = 2v_1 + v_2.$$

Dunque $< v_1, v_2, v_3, v_4 >=< v_1, v_2 >$, come volevasi.

Se su tale retta $r$ consideriamo il sistema coordinato $k$ relativo a $P_1$ a $P_2$ risulta, per quanto appena calcolato

$$k(P_1) = [1,0], k(P_2) = [0,1], k(P_3) = [1,1], k(P_4) = [2,1].$$

Il birapporto cercato è dunque

$$(P_1\ P_2\ P_3\ P_4) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 2.$$

Si ponga $Q_3 := [1,0,3,0]$ e $Q_4 := [2,0,5,0]$ e cerchiamo ora di rispondere alla seconda richiesta.
Su $r$ continuiamo a considerare il sistema coordinato già fissato.
Analogamente, su $s$, consideriamo il sistema coordinato $h$ relativo ai punti $Q_1$ e $Q_2$. Detto $w_i$ il vettore dato come rappresentante di $Q_i$, per $i = 1,2,3,4$, risulta

$$w_3 = w_1 + w_2$$

e

$$w_4 = 2w_1 + w_2.$$

Dunque, risulta, oltre a $h(P_1) = [1,0]$ e $h(P_2) = [0,1]$, anche $h(Q_3) = [1,1]$ e $h(Q_4) = [2,1]$.
I quattro punti di $r$ hanno, ordinatamente e nei sistemi coordinati fissati sulle rette a cui appartengono, le stesse coordinate dei punti di $s$ in cui devono essere trasformati.
Dunque, la trasformazione proiettiva rappresentata, nei sistemi coordinati fissati, dalla proiettività di $\mathbb{RP}_1$

$$T[x,y] = [x,y]$$

è evidentemente la trasformazione proiettiva che manda $P_i$ in $Q_i$ (cioè $\omega = h^{-1} \circ T \circ k$, come da definizione). $\square$

**Esercizio** (22/06/16). *Sia $S_2$ un'estensione complessa di un piano geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di un piano euclideo reale $E_2$ con l'aggiunta della retta impropria. Si fissi un sistema coordinato in $S_2$ dedotto da un riferimento ortonormale di $E_2$.*
*Si consideri la circonferenza $\mathcal{C}$ di $E_2$ di centro l'origine $O$ del riferimento e raggio $R > 0$. Si verifichi che per ogni retta $r \in \mathfrak{F}(O)$, detti $P$ e $P'$ i punti di intersezione di $r$ con $\mathcal{C}$, il quarto armonico su $r$ dopo $P, P'$ e $O$ è la direzione di $r$.*

**Svolgimento.** Conosciamo una proprietà che afferma quanto segue: se $A, B$ sono due punti propri e distinti, allora il punto medio $M$ tra e $A$ e $B$ è il quarto armonico dopo $A, B$ e la direzione di $[A, B]$.
In tal caso, il punto medio tra $P$ e $P'$ è $O$. Detta $R_\infty$ la direzione della retta $[P, P']$, si sa che

$$(P \;\; P' \;\; R_\infty \;\; O) = -1.$$

Se si considera ora un qualsiasi sistema coordinato $k$ su $[P, P']$, in cui $k(P) = [x]$, $k(P') = [y]$, $k(R_\infty) = [z]$ e $k(O) = [w]$, si ha che

$$(P \quad P' \quad R_\infty \quad O) = \frac{|x \quad z|}{|x \quad w|} \cdot \frac{|y \quad w|}{|y \quad z|},$$

mentre

$$(P \quad P' \quad O \quad R_\infty) = \frac{|x \quad w|}{|x \quad z|} \cdot \frac{|y \quad z|}{|y \quad w|}.$$

Ma allora

$$(P \quad P' \quad O \quad R_\infty) = (P \quad P' \quad R_\infty \quad O)^{-1} = (-1)^{-1} = -1.$$

Qualora non si ricordi questa proprietà, si può procedere svolgendo i conti. Mostriamo anche questa strada.
Sia $r : y - mx = 0$ la generica retta di $\mathfrak{F}(O)$, diversa dall'asse $y$. La direzione di $r$ è $R_\infty(m, 1, 0)$. In tal caso, possiamo considerare un sistema coordinato su $r$ in cui la coordinata proiettiva non omogenea di un punto è l'ascissa.

Ossia, per ogni $P \in r$

$$k(P) = \begin{cases} [x, 1] & \text{se } P(x, mx) \\ [1, 0] & \text{se } P = R_\infty \end{cases}.$$

I punti di intersezione di $r$ con $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - R^2 = 0$ sono

$$P(\frac{R}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{mR}{\sqrt{1+m^2}}), \quad P'(-\frac{R}{\sqrt{1+m^2}}, -\frac{mR}{\sqrt{1+m^2}}).$$

Segue che, per la scelta del sistema coordinato

$$k(P) = [R, \sqrt{1+m^2}], \quad k(P') = [-R, \sqrt{1+m^2}].$$

Dunque,

$$(P\ P'\ O\ R_\infty) = \frac{\begin{vmatrix} R & 0 \\ \sqrt{1+m^2} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -R & 1 \\ \sqrt{1+m^2} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R & 1 \\ \sqrt{1+m^2} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -R & 0 \\ \sqrt{1+m^2} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{R}{-\sqrt{1+m^2}} \frac{-\sqrt{1+m^2}}{-R} = -1.$$

Nel caso in cui $r : x = 0$, i punti di intersezione diventano

$$P(0, R), \quad P'(0, -R).$$

Come sistema coordinato prendiamo stavolta quello in cui la coordinata proiettiva non omogenea è l'ordinata, ossia per ogni $P \in r$

$$k(P) = \begin{cases} [y, 1] & \text{se } P(0, y) \\ [1, 0] & \text{se } P = R_\infty = X_\infty \end{cases}.$$

Anche in questo caso

$$(P\ P'\ O\ X_\infty) = \frac{\begin{vmatrix} R & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -R & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -R & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -1.$$

$\square$

**Esercizio** (08/07/16). *Sia* $S_2$ *un'estensione complessa di un piano geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di un piano euclideo reale* $E_2$ *con l'aggiunta della retta impropria. Si fissi un sistema coordinato in* $S_2$ *dedotto da un riferimento ortonormale di* $E_2$.
*Denotati con* $I_1$ *e* $I_2$ *i punti ciclici, si consideri la trasformazione proiettiva*

$$\omega : \mathfrak{F}(I_1) \to \mathfrak{F}(I_2)$$

*tale che* $\omega(i_\infty) = r_1, \omega(r_2) = i_\infty, \omega(r_3) = r_4$ *dove le rette* $r_i$, $i = 1, ..., 4$, *hanno equazioni omogenee:*

$$r_1 : x - iy = 0, r_2 : x + iy = 0, r_3 : x + iy + z = 0, r_4 : x - iy + z = 0.$$

*Si verifichi che per ogni retta* $r \in \mathfrak{F}(I_1)$ *il punto di intersezione tra* $r$ *e* $\omega(r)$ *appartiene alla circonferenza* $\mathcal{C}$ *di centro l'origine e raggio 1.*

**Svolgimento.** Cominiciamo fissando due opportuni sistemi coordinati sui due fasci.
Sul primo fascio $\mathfrak{F}(I_1)$ consideriamo il sistema coordinato $k$ relativo alle rette

$$i_\infty : z = 0, r_2 : x + iy = 0.$$

Dunque, se $r : \lambda z + \mu(x + iy) = 0$, si ha che $k(r) = [\lambda, \mu]$. In particolare, $k(i_\infty) = [1, 0]$ e $k(r_2) = [0, 1]$. Inoltre, $k(r_3) = [1, 1]$.
Analogamente, su $\mathfrak{F}(I_2)$ consideriamo il sistema coordinato $h$ relativo alle rette

$$i_\infty : z = 0, r_1 : x - iy = 0.$$

Anche in questo caso, $h(i_\infty) = [1, 0]$, $h(r_1) = [0, 1]$ e $h(r_4) = [1, 1]$.
A livello di coordinate proiettive non omogenee, si deve avere

$$\xi(i_\infty) = \infty \mapsto \xi'(r_1) = 0.$$

$$\xi(r_2) = 0 \mapsto \xi'(i_\infty) = \infty.$$

$$\xi(r_3) = 1 \mapsto \xi'(r_3) = 1.$$

Imponendo queste condizioni per la generica equazione lineare fratta

$$\xi' = \frac{a\xi' + b}{c\xi + d},$$

si ottiene

$$\omega : \xi' = \frac{1}{\xi}.$$

Ora, è chiaro che $i_\infty \cap r_1 = \{I_2\}$ e $r_2 \cap i_\infty = \{I_1\}$, e i punti ciclici appartengono alla circonferenza unitaria.
Consideriamo ora $r \in \mathfrak{F}(I_1)$, $r \neq r_2, i_\infty$. Dunque, $k(r) = [\xi, 1]$ e $h(\omega(r)) = [1, \xi]$ (considerare la retta diversa da $r_2$ e $i_\infty$ serve ad evitare i casi particolari in cui $\xi$ o $\xi'$ è $\infty$, per semplicità, avendo comunque la cura di osservato a priori che la proprietà richiesta è vera in quei due casi). Inoltre, escludendo che sia $r$ sia $\omega(r)$ siano la retta impropria, si ha che il loro punto di intersezione $P$ deve essere un punto proprio: infatti, esso deve essere diverso sia da $I_1$, sia da $I_2$, visto che l'unica retta di $\mathfrak{F}(I_1)$ che passa per $I_2$ è $i_\infty$, e, analogamente, l'unica retta di $\mathfrak{F}(I_2)$ che passa per $I_1$ è $i_\infty$. Dunque, se $P$ fosse improprio, si avrebbe $r = [I_1, P] = i_\infty$.
Sotto queste ipotesi, si ha, pertanto,

$$r : \xi(x + iy) + z = 0,$$

$$\omega(r) : x - iy + \xi z = 0.$$

Intersecando, si ha

$$r \cap \omega(r) : \begin{cases} \xi(x + iy) + z = 0 \\ x - iy + \xi z = 0 \end{cases} \Rightarrow r \cap \omega(r) : \begin{cases} \xi^2(x + iy) + \xi z = 0 \\ x - iy + \xi z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$r \cap \omega(r) : \begin{cases} \xi^2(x + iy) - (x - iy) = 0 \\ \xi z = iy - x \end{cases} \Rightarrow r \cap \omega(r) : \begin{cases} y = \frac{i(\xi^2-1)}{\xi^2+1} x \\ z = \frac{-2\xi}{\xi^2+1} x \end{cases}$$

Dunque, il punto di intersezione è $P[1, \frac{i(\xi^2-1)}{\xi^2+1}, \frac{-2\xi}{\xi^2+1}]$. Ricordando che $P$ è un punto proprio, normalizziamo le coordinate in maniera tale da "leggere" le coordinate affini, ossia

$$P[\frac{\xi^2+1}{-2\xi}, \frac{i(\xi^2-1)}{-2\xi}, 1].$$

A questo punto, si tratta solo di verificare che l'equazione $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$ viene soddisfatta da $P$. Infatti,

$$\left(\frac{\xi^2+1}{-2\xi}\right)^2 + \left(\frac{i(\xi^2-1)}{-2\xi}\right)^2 = \frac{\xi^4+2\xi^2+1-\xi^4+2\xi^2-1}{4\xi^2} = 1.$$

$\square$

**Esercizio** (05/09/16)**.** *Si considerino la retta $r$ di equazioni*

$$r : \begin{cases} x_1 - x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

*ed il punto $P = [1,0,0,0,-1]$ di $\mathbb{RP}_4$. Si determinino la dimensione, le equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio $r \vee \{P\}$.*

**Svolgimento.** Sappiamo che la dimensione di $r \vee \{P\}$ è data da

$$\dim r + \dim\{P\} - \dim r \cap \{P\} = 1 - \dim r \cap \{P\}.$$

Dato che $P \notin r$, come è immediato verificare, l'intersezione $r \cap \{P\}$ è vuota, e ha quindi dimensione $-1$. Dunque

$$\dim r \vee \{P\} = 2.$$

Per determinare le equazioni cartesiane di $\mathcal{L} = r \vee \{P\}$, scriviamo $r$ come congiungente due punti arbitrari, per esempio

$$A = [0,2,-2,1,0], \quad B = [1,0,1,0,1].$$

Dobbiamo pertanto determinare $\mathcal{L} = [A, B, P]$. Per fare ciò, è sufficiente imporre che il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}$$

sia 3. Individuato un minore di ordine 3 non nullo, per esempio

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

dobbiamo imporre che siano nulli, contemporaneamente, i suoi orlati di ordine 4, che sono due, precisamente

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 2x_4 - x_2, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_5 \end{vmatrix} = 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 2x_5.$$

$\mathcal{L}$ è quindi il piano

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x_2 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 2x_5 = 0 \end{cases} .$$

□

**Esercizio** (17/01/17)**.** *Sia $S_2$ un'estensione complessa di un piano geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di un piano euclideo reale $E_2$ con l'aggiunta della retta impropria. Si fissi un sistema coordinato in $S_2$ dedotto da un riferimento ortonormale di $E_2$.*
*Si consideri il punto $P(1,3)$. Detta*

$$\omega : \mathfrak{F}(P) \to \mathfrak{F}(P)$$

*l'involuzione sul fascio $\mathfrak{F}(P)$ avente come punti uniti le rette $s_1$ e $s_2$ per $P$ parallele agli assi coordinati, si determini un'equazione di $\omega$ e si verifichi che per ogni retta $r \in \mathfrak{F}(P)$, $\omega(r)$ e $r$ sono simmetriche rispetto sia a $s_1$ che a $s_2$.*

**Svolgimento.** Consideriamo le rette $s_1 : x = 1$ e $s_2 : y = 3$.
Si consideri su $\mathfrak{F}(P)$ il sistema coordinato $h$ in cui la coodinata proiettiva non omogenea di una retta è il suo coefficiente angolare. Dunque, se $r : ax + by + c = 0$, si ha che $h(r) = [a, -b]$.

In particolare, $h(s_1) = [1, 0]$, $h(s_2) = [0, 1]$. Dato che $\omega$ è una proiettività iperbolica (ha due punti uniti distinti) e $\omega$ è un involuzione, essa deve avere invariante assoluto $-1$. Dunque, se $h(r) = [\xi, 1]$ e $h(\omega(r)) = [\xi', 1]$, si deve avere

$$(s_1 \quad s_2 \quad r \quad \omega(r)) = -1,$$

ossia

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \xi' \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \xi' \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \xi \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -1 \Rightarrow \omega : \xi' = -\xi.$$

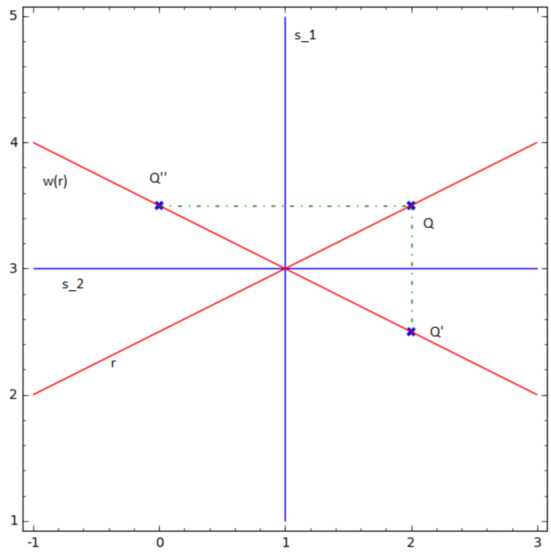
Ora, considerata la generica retta $r$ di $\mathfrak{F}(P)$

$$r : y = \xi x - \xi + 3 = 0$$

risulta che

$$\omega(r) : y = -\xi x + \xi + 3 = 0.$$

Per verificare che esse sono simmetriche rispetto a $s_1$ e $s_2$, bisogna controllare che, preso un qualsiasi punto $Q \in r$, considerata la retta per $Q$ ortogonale a $s_1$ (a $s_2$) e il punto $Q' \in \omega(r)$ di intersezione di tale retta con $\omega(r)$, il punto medio tra $Q$ e $Q'$ cade su $s_1$ (su $s_2$).
In questo caso, dato che le rette $s_1$ e $s_2$ sono perpendicolari agli assi, è sufficiente controllare che i punti di $r$ e $\omega(r)$ che hanno la stessa ascissa (ordinata) hanno punto medio su $s_2$ (su $s_1$), come mostra il grafico sottostante.




Si prenda allora $Q(\xi, \xi x - \xi + 3)$ il generico punto si $r$, e si consideri il punto $Q'(x, -\xi x + \xi + 3)$ su $\omega(r)$ con la stessa ascissa. Il punto medio ha ordinata

$$\frac{-\xi x + \xi + 3 + \xi x - \xi + 3}{2} = 3,$$

e quindi cade su $s_2$, come volevasi.
Analogamente, preso il punto $Q(\frac{y+\xi-3}{\xi}, y) \in r$, e il punto $Q'(\frac{\xi+3-y}{\xi}, y)$ di $\omega(r)$ alla stessa ordinata, si ha che l'ascissa del punto medio è

$$\frac{y + \xi - 3 + \xi + 3 - y}{2\xi} = \frac{2\xi}{2\xi} = 1,$$

e quindi cade su $s_1$. $\square$

**Esercizio** (01/02/17)**.** *Date le rette $r$ e $s$ di $\mathbb{RP}_4$ di equazioni:*

$$r : \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

*si determinino dimensione ed equazioni cartesiane del sottospazio $r \vee s$.*

**Svolgimento.** Sia $\mathcal{L} = r \vee s$. Scriviamo $r = [A, B]$ e $s = [C, D]$, dove, per esempio

$$A = [0, 0, 0, 1, 3], \quad B = [2, -2, -3, 0, 0],$$

$$C = [0, 0, 0, -1, 3], \quad D = [2, 2, 3, 0, 0].$$

Lo spazio $\mathcal{L}$ è lo spazio

$$\mathcal{L} = [A, B, C, D].$$

Possiamo determinare un sistema di generatori proiettivamente indipendenti, estraendo un sistema massimale di vettori linearmente indipendenti da

$$\{(0, 0, 0, 1, 3), (2, -2, -3, 0, 0), (0, 0, 0, -1, 3), (2, 2, 3, 0, 0)\}.$$

Tuttavia, si vede facilmente che essi sono linearmente indipendenti. Dunque i punti $A, B, C, D$ sono proiettivamente indipendenti (le rette sono sghembe) e generano un sottospazio di dimensione 3, determinato dall'annullarsi del determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{vmatrix} = 72x_2 - 48x_3.$$

Dunque,

$$\mathcal{L} : 3x_2 - 2x_3 = 0.$$

□

**Esercizio** (16/02/17)**.** *Sia $S_2$ un'estensione complessa di un piano geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di un piano euclideo reale $E_2$ con l'aggiunta della retta impropria. Si fissi un sistema coordinato in $S_2$ dedotto da un riferimento ortonormale di $E_2$.*
*Siano $r_1, r_2, r_3, r_4$ quattro rette distinte passante tutte per lo stesso punto $P \in E_2$. Si mostri che se $r_1$ e $r_2$ sono perpendicolari tra loro ed anche $r_3$ e $r_4$ sono perpendicolari tra loro, non esiste alcuna trasformazione proiettiva*

$$\omega : \mathfrak{F}(P) \to \mathbb{RP}_1$$

*tale che*

$$\omega(r_1) = [1, 0], \quad \omega(r_2) = [0, 1], \quad \omega(r_3) = [1, 1], \omega(r_4) = [2, 1].$$

**Svolgimento.** Si fissi, su $\mathfrak{F}(P)$ il sistema coordinato relativo alle rette $r_1$ e $r_2$. Se le rette $r_1$ e $r_2$ hanno equazione

$$r_1 : ax + by + c = 0, \quad r_2 : bx - ay + d = 0$$

(ricordando che sono perpendicolari), la generica retta del fascio sarà

$$r : (\xi a + b)x + (\xi b - a)y + \xi c + d = 0.$$

La coordinata proiettiva non omogenea in questo sistema coordinato è il parametro $\xi$.
Questa scelta è opportuna perché $\xi(r_1) = \infty$ e $\xi(r_2) = 0$. Dunque, se $\omega$ esistesse, essa deve fissare (a livello di coordinate proiettive non omogenee) $\infty$ e 0, ossia l'equazione di $\omega$ deve essere del tipo

$$\omega : \xi' = \rho\xi,$$

ove $\rho \neq 0$ è un numero reale.
Dato che bisogna avere

$$\xi(r_3) \mapsto 1, \quad \xi(r_4) \mapsto 2,$$

possiamo ricavare che $\xi(r_3) = \frac{1}{\rho}$, $\xi(r_3) = \frac{2}{\rho}$. Ma allora, risulta che

$$r_3 : (a + \rho b)x + (b - \rho a)y + c + \rho d = 0,$$

$$r_3 : (2a + \rho b)x + (2b - \rho a)y + 2c + \rho d = 0.$$

Le direzioni delle due rette, sono, rispettivamente

$$R_\infty(\rho a - b, a + \rho b, 0), \quad R'_\infty(\rho a - 2b, 2a + \rho b, 0).$$

Per ipotesi, esse sono ortogonali. Tuttavia, facendo il prodotto scalare, risulta

$$\begin{aligned}(\rho a - b)(\rho a - 2b) + &(a + \rho b)(2a + \rho b) \\ &= \rho^2 a^2 + 2b^2 - 3\rho ab + 2a^2 + \rho^2 b^2 + 3\rho ab \\ &= 2a^2 + 2b^2 + \rho^2 a^2 + \rho^2 b^2 > 0\end{aligned}$$

che è assurdo. Dunque $\omega$ non esiste. $\square$

**Esercizio** (23/06/17)**.** *Sia $S_3$ un'estensione complessa di uno spazio geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di uno spazio Euclideo reale $E_3$ con l'aggiunta del piano improprio. Si fissi un sistema coordinato in $S_3$ dedotto da un riferimento ortonormale di $E_3$.*
*Sia $\mathfrak{F}$ il fascio improprio di piani paralleli al piano $\alpha : x = 1$. Verificare che per ogni piano proprio $\beta \in \mathfrak{F}$, diverso da $\alpha$, il quarto armonico su $\mathfrak{F}$ dopo $\alpha$, $\beta$ e $\pi_\infty$ è il piano equidistante da $\alpha$ e da $\beta$.*

**Svolgimento.** Dotiamo $\mathfrak{F}$ di una struttura di retta geometrica proiettiva. L'equazione del fascio è

$$\mathfrak{F} : x + k = 0.$$

Consideriamo il sistema coordinato $h$ su $\mathfrak{F}$ in cui la coordinata proiettiva non omogenea è il parametro $k$ che individua univocamente un piano del fascio. Si ha, cioè,

$$h(\beta) = \begin{cases} [k, 1] & \text{se } \beta \neq \pi_\infty \\ [1, 0] & \text{se } \beta = \pi_\infty \end{cases}.$$

In particolare, in questo sistema coordinato, $h(\alpha) = [-1, 1]$.
Sia $\beta \in \mathfrak{F}$ diverso da $\alpha$. Allora $\beta : x + k$, con $k \neq -1$. Il piano equidistante tra da $\alpha$ e $\beta$ è il piano

$$\gamma' : x + \frac{k-1}{2} = 0.$$

Calcoliamo il quarto armonico $\gamma \in \mathfrak{F}$ dopo $\alpha, \beta$ e $\pi_\infty$.
Si ha, se $h(\beta) = [k, 1]$ e $h(\gamma) = [k', 1]$,

$$(\alpha\ \ \beta\ \ \pi_\infty\ \ \gamma) = -1 \iff \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k & k' \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & k' \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = -1,$$

cioè, si deve avere,

$$k' = \frac{k-1}{2},$$

come volevasi. □

**Esercizio** (21/09/17)**.** *Sia $S_2$ un'estensione complessa di uno spazio geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di un piano Euclideo reale $E_2$ con l'aggiunta della retta impropria. Si fissi un sistema coordinato in $S_2$ dedotto da un riferimento ortonormale di $E_2$.*
*Sono assegnati un numero reale positivo $\alpha$, $\alpha \neq 1$, e due rette $t_1$ e $t_2$ perpendicolari, passanti per l'origine $O$. Sia*

$$\omega : \mathfrak{F}(O) \to \mathfrak{F}(O)$$

*la proiettività avente $t_1$ e $t_2$ come punti uniti ed invariante assoluto $\alpha$.*
*Verificare che per ogni retta $r$ del fascio diversa da $t_1$ e $t_2$, $r$ e $\omega(r)$ non sono mai perpendicolari.*

**Svolgimento.** Consideriamo su $\mathfrak{F}(O)$ il sistema coordinato $k : \mathfrak{F}(O) \to \mathbb{RP}_1$ relativo a $t_1$ e $t_2$ (in cui $k(t_1) = [1,0]$ e $k(t_2) = [1,0]$): più precisamente, se

$$t_1 : ax + by = 0,$$

$$t_2 : bx - ay = 0,$$

(ricordiamo che $t_1 \perp t_2$), allora

$$\mathfrak{F}(O) : \xi(ax + by) + (bx - ay) = (a\xi + b)x + (b\xi - a)y = 0.$$

Sia $r \in \mathfrak{F}(O)$ diversa da $t_1$ e $t_2$. Supponiamo che $k(r) = [\xi, 1]$ e $k(\omega(r)) = [\xi', 1]$. Allora, imponendo la condizione sull'invariante assoluto determiniamo l'equazione di $\omega$. Si ha

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \xi' \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \xi' \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \xi \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \alpha \Rightarrow \omega : \xi' = \alpha\xi.$$

Ma allora si ha che, se

$$r : (a\xi + b)x + (b\xi - a)y = 0,$$

allora

$$\omega(r) : (a\alpha\xi + b)x + (b\alpha\xi - a)y = 0.$$

Dunque, $r$ ha direzione $R_\infty(b\xi - a, -a\xi - b, 0)$, mentre $\omega(r)$ ha direzione $R'_\infty(b\alpha\xi - a, -a\alpha\xi - b, 0)$.
Tuttavia, facendo il prodotto scalare si ha che

$$\begin{aligned}(b\xi - a)(b\alpha\xi - a)+&(a\xi + b)(a\alpha\xi + b)\\ &= \alpha b^2\xi^2 + a^2 - ab\alpha\xi - ab\xi + \alpha a^2\xi^2 + b^2 + ab\alpha\xi + ab\xi\\ &= \alpha b^2\xi^2 + a^2 + \alpha a^2\xi^2 + b^2 > 0,\end{aligned}$$

Dunque, $r$ non è mai perpendicolare a $\omega(r)$. □

**Esercizio** (11/04/18)**.** *Sia $S_3$ un'estensione complessa di uno spazio geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di uno spazio Euclideo reale $E_3$ con l'aggiunta del piano improprio. Si fissi un sistema coordinato in $S_3$ dedotto da un riferimento ortonormale di $E_3$.*
*Si considerino la retta $r = [A_\infty, B_\infty]$ dove $A_\infty(0, 1, 0, 0)$ e $B_\infty(0, 1, 2, 0)$ ed il fascio $\mathfrak{F}$ di piani avente per asse la retta*

$$a : \begin{cases} y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} .$$

*Mostrare che l'applicazione*

$$\omega : r \to \mathfrak{F}$$

*che associa ad ogni direzione $D_\infty \in r$ il piano $\omega(D_\infty)$ contenente $a$ e perpendicolare a $D_\infty$, è una trasformazione proiettiva.*

**Svolgimento.** Cominciamo con l'osservare che possiamo ottenere $a$ come intersezione di due qualsiasi piani distinti del fascio $\mathfrak{F}$, le cui equazioni nel riferimento fissato possono essere ottenute come combinazioni lineari delle equazioni dei piani $\pi_1 : y + z = 0$ e $\pi_2 : y - z = 0$ (equivalentemente: le soluzioni di un sistema lineare non cambiano se si sostituisce ad un equazione una combinazione lineare delle equazioni che formano il sistema).

Dunque, prendendo ad esempio la somma e la differenza delle equazioni date, possiamo scrivere

$$a : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

e dunque possiamo scrivere molto semplicemente

$$\mathfrak{F} : ky + z = 0.$$

Il passaggio precedente non è necessario, ma semplificherà notevolmente i conti.

Ora, considerato il piano $\pi : y = 0$, possiamo fissare un sistema coordinato sul fascio $\mathfrak{F}$ tale che la coordinata proiettiva omogenea di un piano $\alpha \in \mathfrak{F}$ sia il parametro $k$ che individua univocamente tale piano, ossia

$$\xi'(\alpha) : \begin{cases} k & \text{se } \alpha \neq \pi \\ \infty & \text{se } \alpha = \pi \end{cases}$$

Sulla retta $r$ fissiamo il sistema coordinato $h$ relativo ai punti $A_\infty$ e $B_\infty$. In tal caso, se $D_\infty(x, y, z, t) \in r$, le sue coordinate sono combinazioni lineari delle coordinate di $A_\infty$ e $B_\infty$. Dunque, per opportuni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, non entrambi nulli, si ha

$$D_\infty(0, \lambda + \mu, 2\mu, 0).$$

Come coordinata proiettiva non omogena, possiamo prendere, come al solito, il rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$, con l'usuale convenzione rispetto al denominatore nullo (che corrisponde al punto $A_\infty$). Dunque, se $D_\infty \neq A_\infty$, possiamo scrivere

$$D_\infty(0, \frac{\xi + 1}{2}, 1, 0).$$

Ora, sappiamo che se un qualsiasi piano nello spazio ha equazione

$$\beta : ax + by + cz + d = 0,$$

la direzione ad esso ortogonale è semplicemente individuata ordinatamente dai coefficienti della $x$, della $y$ e della $z$, ossia

$$\beta_\infty^\perp(a, b, c, 0).$$

Pertanto, il piano ortogonale a $D_\infty$ appartenente a $\mathfrak{F}$ è

$$\omega(D_\infty) : \frac{\xi+1}{2}y + z = 0.$$

D'altro canto, il generico piano di $\mathfrak{F}$ si scrive come

$$\alpha : \xi' y + z = 0.$$

Dunque, è evidente che si deve avere

$$\omega : \xi' = \frac{\xi+1}{2}.$$

Osserviamo che questa equazione lineare fratta definisce una trasformazione proiettiva con la proprietà richiesta. □

# ESERCIZI DI TIPO 2

**Esercizio** (13/01/15)**.** *Sia $S_2$ un'estensione complessa di un piano geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di un piano euclideo reale $E_2$ con l'aggiunta della retta impropria, e si fissi un sistema coordinato in $S_2$ dedotto da un riferimento ortonormale di $E_2$.*

*(a) Si scriva l'equazione del fascio di parabole $\mathfrak{F}$ aventi vertice $V(1,1)$ ed ivi tangenti alla retta $t : y = x$.*

*(b) Si determini la parabola di $\mathfrak{F}$ avente $F(2,0)$ come fuoco.*

**Svolgimento.**

(a) Sappiamo che tutte le parabole del fascio sono tangenti nello stesso punto alla retta $t$, e che tale punto è il vertice della parabola. Dunque conosciamo anche l'asse della parabola, ossia la retta per $V$ perpendicolare a $t$. La direzione di $t : x - y = 0$ è $(1,1,0)$, pertanto la direzione perpendicolare è $(1,-1,0)$. Dunque la retta con direzione data e passante per $V$ è

$$a : x + y - 2 = 0.$$

D'altro canto, la direzione dell'asse è proprio il centro della parabola, ossia $C_\infty(1,-1,0)$. Ora, sappiamo che $i_\infty : z = 0$ è tangente la parabola nel suo centro. Abbiamo pertanto tutti gli strumenti per scrivere l'equazione del fascio di parabole bitangenti alla retta $t$ in $V$ e alla retta impropria in $i_\infty$. Infatti, oltre le tangenti, conosciamo anche la retta che congiunge i punti di tangenti, ossia $a$. Dunque, le coniche degeneri del fascio sono

$$\{i_\infty, t\} : x - y = 0$$

e

$$\{a, a\} : (x + y - 2)^2 = 0.$$

Pertanto, si ha

$$\mathfrak{F} : (x + y - 2)^2 + k(x - y) = 0.$$

(b) Si ha che

$$\mathfrak{F} : x^2 + y^2 + 2xy + (k - 4)x - (k + 4)y + 4 = 0.$$

Dunque, la matrice generale di una conica del fascio è

$$A(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{k-4}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{k+4}{2} \\ \frac{k-4}{2} & -\frac{k+4}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Proponiamo tre diversi metodi risolutivi, adattabili ad altri esercizi di questo tipo:

1. Sappiamo che le rette $y = \pm i(x-2)$ (rette isotrope per $F$) devono essere tangenti la parabola. Consideriamo i sistemi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy + (k - 4)x - (k + 4)y + 4 = 0 \\ y = \pm i(x - 2) \end{cases}.$$

Consideriamo il caso con $+i$, per esempio. Si ha:

$$\begin{cases} x^2 - (x-2)^2 + 2ix(x-2) + (k-4)x - i(k+4)(x-2) + 4 = 0 \\ y = i(x-2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (2i)x^2 - (8i + ki - k)x + 2ki + 8i = 0 \\ y = i(x-2) \end{cases}$$

Imporre la condizione di tangenza significa imporre che il discriminante dell'equazione di secondo grado sia zero (ossia che otteniamo una sola soluzione del sistema con molteplicità doppia). Si ha che

$$\Delta = (8i + ki - k)^2 - 4(2ki + 8i)(2i) = -2i(8+k)k = 0 \Rightarrow k = -8$$

(infatti, possiamo escludere il caso $k = 0$, visto che corrisponde ad una conica degenere). Dunque, la parabola cercata è

$$\mathcal{P} : x^2 + y^2 + 2xy - 12x + 4y + 4 = 0.$$

2. Come già detto, le rette isotrope per $F$ devono essere tangenti la conica. Inoltre, la retta congiungente i punti di tangenza, è proprio la polare di $F$, ossia la direttrice (più in generale, la polare di un punto non appartenente ad una conica non degenere è la retta congiungente i punti di tangenza delle due tangenti condotte dal punto alla conica).

   Dunque, possiamo scrivere l'equazione di un fascio bitangente in cui la conica semplicemente degenere è l'unione delle due rette isotrope:

$$\mathcal{C}_1 : (x-2)^2 + y^2 = 0$$

   e quella doppiamente degenere è la retta doppia polare di $F$ relativamente alla generica conica del fascio $\mathfrak{F}$.

   Calcoliamo i coefficienti di $P_F$: si ha

$$(2, 0, 1)A(k) = (\frac{k}{2}, -\frac{k}{2}, k).$$

Ricordando che le coniche degeneri del fascio si ottengono per $k = 0, \infty$, possiamo assumere $k$ diverso da questi due valori (stiamo cercando una conica non degenere). Dunque, possiamo dividere tutto per $\frac{k}{2}$ e ottenere che $P_F : x - y + 2 = 0$.

A questo punto, il fascio che cerchiamo è

$$\mathfrak{F}' : (x-2)^2 + y^2 + h(x - y + 2)^2 = 0.$$

Questo è il fascio di coniche che rispettano le seguenti due proprietà:

- $F(2, 0)$ è un fuoco.
- La polare di $F$ è $P_F : x - y + 2 = 0$.

Imponendo che il minore principale della matrice generale del fascio sia nullo, ossia

$$\begin{vmatrix} 1+h & -h \\ -h & 1+h \end{vmatrix} = 2h + 1 = 0,$$

si ottiene che vi è una sola parabola in questo fascio, in corrispondenza del valore $h = -\frac{1}{2}$. Per tale valore di $h$, troviamo la parabola

$$\mathcal{P} : x^2 + y^2 + 2xy - 12x + 4y + 4 = 0.$$

In effetti, essa coincide con una parabola di F per $k = -8$.

3. Sfruttiamo il concetto di eccentricità. Per una parabola, essa è 1. Si deduce che la parabola cercata è il luogo dei punti equidistanti dal fuoco $F(2, 0)$ e la direttrice $P_F : x - y + 2 = 0$, che abbiamo determinato al punto precedente.

   Si tratta, pertanto di imporre, sfruttando la formula della distanza punto-retta e della distanza euclidea (ricordiamo che abbiamo fissato un riferimento in $S_2$ dedotto da un riferimento ortonormale di $E_2$, dunque possiamo usare le proprietà metriche),

$$\frac{d(F, P)^2}{d(P_F, P)^2} = 1,$$

ovvero, preso il generico punto $P(x, y)$,

$$\frac{(x-2)^2+y^2}{\frac{(x-y+2)^2}{2}} = 1 \Rightarrow (x-2)^2+y^2-\frac{1}{2}(x-y+2)^2 = 0.$$

Riconosciamo che è esattamente la parabola trovata nel punto precedente (per $h = -\frac{1}{2}$ nel fascio $\mathfrak{F}'$).

$\square$

**Esercizio** (15/04/15)**.** *Sia $S_2$ un'estensione complessa di un piano geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di un piano euclideo reale $E_2$ con l'aggiunta della retta impropria, e si fissi un sistema coordinato in $S_2$ dedotto da un riferimento ortonormale di $E_2$.*
*Si determini un'equazione della conica $\mathcal{C}$ che ammette come fuochi l'origine ed il punto $F(2, 0)$ e passa per il punto $P(1, 1)$. Si classifichi $\mathcal{C}$.*

**Svolgimento.** La conica, ha la retta $a : y = 0$ come asse focale.
Dato che la direzione ortogonale a $a$ è $Y_\infty(0, 1, 0)$, segue che

$$a = P_{Y_\infty}.$$

Per reciprocità, $Y_\infty \in P_O$ e $Y_\infty \in P_F$: le polari dei fuochi sono paralleli all'asse y.
Per esempio, la polare di $O$ ha equazione $P_O : x + k = 0$.
Sappiamo che le rette isotrope per $O$, ossia

$$i_1 : y = ix, \quad i_2 : y = -ix,$$

sono tangenti la conica: la retta congiungente i punti di tangenza è proprio $P_O$. La conica cercata appartiene al fascio bitangente

$$\mathfrak{F} : h(x^2 + y^2) + (x + k)^2 = 0.$$

Imponendo il passaggio per $P(1, 1)$ risulta

$$2h + (1 + k)^2 = 0 \Rightarrow h = -\frac{(k+1)^2}{2}.$$

Dunque otteniamo il fascio

$$\mathfrak{F}' : (k+1)^2(x^2+y^2) - 2(x+k)^2 = 0.$$

Per imporre ora che il secondo fuoco sia proprio $F(2,0)$, avendo già imposto che l'altro fuoco sia $O$, è sufficiente imporre che il centro sia il punto medio tra $F$ e $O$, ossia $A(1,0)$.
Una volta sviluppati i conti nell'equazione del fascio, si consideri

$$A(k) = \begin{pmatrix} (k+1)^2-2 & 0 & -2k \\ 0 & (k+1)^2 & 0 \\ -2k & 0 & -2k^2 \end{pmatrix}$$

la matrice della generale conica del fascio, si tratta di imporre che $P_A = i_\infty$, ossia che la riga

$$(1,0,1)A(k) = (k^2-1, 0, -2k-2k^2)$$

sia proporzionale alla riga $(0,0,1)$.
In particolare, si deve avere $k = \pm 1$. Tuttavia $k = -1$ non va bene, visto che in tal caso la terza componente si annulla (oppure perché tale valore individua una conica degenere, annullando la seconda riga).
Dunque la conica cercata si trova in corrispondenza del valore $k = 1$, ossia

$$\mathcal{C} : x^2 + 2y^2 - 2x - 1 = 0,$$

che è un'ellisse. $\square$

**Esercizio** (04/06/15)**.** *Sia $S_2$ un'estensione complessa di un piano geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di un piano affine reale $A_2$ con l'aggiunta della retta impropria, e si fissi un sistema coordinato in $S_2$ dedotto da un riferimento affine di $A_2$.*
*Si determini un'equazione del fascio di iperboli passanti per $P(1,0)$, aventi per asintoti l'asse $y$ ed una retta coniugata alla retta*

$$r : y + 2x - 1 = 0.$$

*Si determini inoltre il centro dell'iperbole del fascio passante per il punto $Q(\frac{1}{2}, 0)$.*

**Svolgimento.** Sia $a_1 : x = 0$ il primo asintoto, e sia $a_2 : ax + by + c = 0$ il secondo asintoto. Essendo $a_2$ tangente l'iperbole in un punto improprio $D_\infty$ (che è la sua direzione), risulta che $a_2 = P_{D_\infty}$, visto che la retta polare di un punto della conica è proprio la tangente in quel punto.
Ma, dato che $r$ e $a_2$ sono coniugate, il polo di $a_2$, ossia $D_\infty$ appartiene alla retta $r$. Ma allora $D_\infty$ è proprio la direzione della retta $r$, ossia $D_\infty = (1, -2, 0)$. Ma $D_\infty$ è la direzione di $a_2$.
Dunque $a_2$ è la retta parallela a $r$ passante per il centro. Dato che esso appartiene ad $a_1$, avrà coordinate $C(0, k)$.
Dunque

$$a_2 : 2x + y - k = 0.$$

Ma allora, possiamo scrivere il fascio bitangente le cui coniche non degeneri sono le iperboli di asintoti $a_1$ e $a_2$ (fissato $k$). La retta congiungente i punti di tangenza (impropri) è $i_\infty$. Si ha

$$\mathfrak{F} : x(2x + y - k) + h = 0.$$

Imponendo l'ultima condizione, ossia il passaggio per $P(0, 1)$, troviamo il fascio cercato, ossia

$$1(2 - k) + h = 0 \Rightarrow h = k - 2.$$

Dunque, il fascio cercato è

$$\mathfrak{F} : x(2x + y - k) + k - 2.$$

Determiniamo l'iperbole che passa per $Q(\frac{1}{2}, 0)$. Si ha:

$$\frac{1}{2}(1 - k) + k - 2 = 0 \Rightarrow k = 3.$$

Ricordando che il parametro $k$ rappresentava esattamente l'ordinata del centro, si ha che il centro è $C(0, 3)$. $\square$

**Esercizio** (03/09/15). *Sia $S_2$ un'estensione complessa di un piano geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di un piano euclideo reale $E_2$ con l'aggiunta della retta impropria, e si fissi un sistema coordinato in $S_2$ dedotto da un riferimento ortonormale di $E_2$.*
*Si determini un'equazione dell'iperbole equilatera $\mathcal{C}$ avente la retta $r : x+y = 0$ come asintoto, la retta $d : 3x-y-4 = 0$ come diametro, e tale che l'origine e $P(1,1)$ siano punti coniugati rispetto a $\mathcal{C}$. Si determinino inoltre gli assi di $\mathcal{C}$.*

**Svolgimento.** Dal momento che sia $r$ sia $d$ passano per il centro di $\mathcal{C}$, possiamo agilmente determinare le coordinate del centro, intersecando le due rette:

$$r \cap d : \begin{cases} x+y=0 \\ 3x-y-4=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow C(1,-1).$$

A questo punto, dato che l'iperbole è equilatera, gli asintoti sono ortogonali, pertanto possiamo calcolare l'altro asintoto come la retta $s$ ortogonale a $t$ passante per $C$. Visto che $r$ ha direzione $R_\infty(1,-1,0)$, la direzione di $s$ sarà $S_\infty(1,1,0)$. Dunque $s$ è del tipo $s : x-y+k=0$, ove $k$ è determinato dal passaggio per $C$. Imponendo tale condizione, si determina che $s : x-y-2 = 0$.
Sappiamo che gli asintoti di un'iperbole sono le rette passanti per il centro e tangenti all'iperbole nei punti impropri, che sono precisamente le direzioni di tali asintoti. La retta che congiunge $R_\infty$ e $S_\infty$ è necessariamente $i_\infty$.
Avendo due tangenti e la retta che congiunge i punti di tangenza, possiamo pertanto scrivere il fascio bitangente delle iperboli equilatere con le proprietà finora sfruttate, cioè

$$\mathfrak{F} : (x+y)(x-y-2)+k=0.$$

Avendosi,

$$\mathfrak{F} : x^2-y^2-2x-2y+k=0,$$

la matrice della generale conica del fascio è

$$A(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & k \end{pmatrix}.$$

Affinchè l'origine e $P$ siano coniugati, si deve avere

$$(0,0,1)A(k)(1,1,1)^t = k-2 = 0 \Rightarrow k = 2.$$

Pertanto l'iperbole cercata è

$$\mathcal{C} : x^2 - y^2 - 2x - 2y + 2 = 0.$$

Per determinare gli assi, dobbiamo cercare i diametri che sono ortogonali alla propria direzione coniugata. Ovviamente, conoscendo il centro, è sufficiente determinarne uno, visto che essi saranno ortogonali.
Mostriamo quattro modi diversi di determinare gli assi in questo frangente.

- Consideriamo su $\mathfrak{F}(C)$ un sistema coordinato in cui la coordinata proiettiva non omogenea è il coefficiente angolare. Allora l'equazione dell'involuzione dei diametri coniugati è

  $$mm' - 1 = 0.$$

  Dato che la direzione ortogonale ad un asse è il suo polo $D_\infty$, il suo diametro coniugato passa per $D_\infty$, che è quindi la sua direzione. Ma la retta ortogonale ad un asse passante per il centro è l'altro asse. Riassumendo: gli assi sono i diametri coniugati che sono tra loro ortogonali. Dunque è possibile determinarli imponendo $m' = -\frac{1}{m}$ nell'equazione dell'involuzione dei diametri coniugati. Si ha, pertanto,

  $$m\left(-\frac{1}{m}\right) - 1 = -2 = 0.$$

  L'indeterminazione implica che $m$ oppure $m'$ è $\infty$ (e l'altro è conseguentemente 0) ossia le rette sono parallele agli assi coordinati.

Per capire meglio il perché, si scriva l'equazione in forma lineare fratta

$$m' = \frac{1}{m}.$$

Imponendo, come prima $m' = -\frac{1}{m}$, segue

$$\frac{2}{m} = 0 \iff m = \infty.$$

Dunque gli assi, imponendo il passaggio per $C(1, -1)$, sono $a_1 : x = 1$ e $a_2 : y = -1$.

- Possiamo considerare il fascio delle rette che passano per il centro, ossia

$$\mathfrak{F} : x + y + h(x - y - 2) = 0.$$

Dunque, la retta generica di questo fascio ha equazione

$$r_h : (1 + h)x + (1 - h)y - 2h = 0.$$

Ricordiamo che, data una retta di equazione $ax + by + c = 0$, la sua direzione è semplicemente $(b, -a, 0)$, e quindi la sua direzione ortogonale è $(a, b, 0)$.

Dunque, dobbiamo imporre che $(1 + h, 1 - h, 0)$ sia il polo di una retta del fascio. Si ha,

$$(1 + h, 1 - h, 0)A(2) = (1 + h, h - 1, -2).$$

Ci rendiamo conto, ad esempio osservando il termine noto, che possiamo scegliere $h = 1$. In tal caso, il primo asse è $a_1 : x = 1$, e quindi l'altro sarà $a_2 : y = -1$.

- Come visto nel punto precedente, la direzione ortogonale ad una retta di equazione $ax+by+c = 0$ è $(a, b, 0)$. Affinché questa direzione sia il polo di di un diametro, occorre che $(a, b)$ sia un autovettore (di autovalore non nullo) della sottomatrice principale di ordine $2 \times 2$ della matrice della conica (in analogia con quanto si fa per la determinazione dei piani princpali di una quadrica, ma "scendendo" di una dimensione).

In questo caso, si tratta di trovare gli autovettori della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice è già in forma diagonale, quindi gli autovalori sono 1 e $-1$. Gli autospazi relativi sono:

$$V_1 =< (1,0) >, V_{-1} =< 0,1 > .$$

Dunque, le direzioni degli assi sono $X_\infty(1,0,0)$ e $Y_\infty(0,1,0)$. Imponendo il passaggio per il centro si trovano $a_1 : x = 1$ e $a_2 : y = -1$.

- Un altro modo per determinare gli assi noti gli asintoti e il centro è il tenere conto che, essendo essi assi di simmetria, devono essere bisettrici degli asintoti. Un trucco molto comodo per determinare la bisettrice di due rette è il seguente:

  – Individuare le direzioni delle due rette e il punto di intersezione.

  – Osservare che (ricordando il famoso "metodo del parallelogramma") se le direzioni hanno la stessa lunghezza, la somma vettoriale è un vettore che individua la diagonale del quadrato di lati la lunghezza dei vettori dati (infatti, in tal caso, il "parallelogramma" è questo quadrato). Questa direzione è la direzione della bisettrice.

  – Se le direzioni non hanno la stessa lunghezza, bisogna normalizzarle (ossia dividere per la loro norma) portandole entrambe a lunghezza unitaria, e ricondursi al caso precedente.

  – Una volta individuata la direzione, si considera la retta con quella direzione e passante per il punto di intersezione di cui al primo punto.

– L'altra bisettrice è semplicemente la retta perpendicolare, passante per lo stesso punto (corrisponde alla differenza vettoriale).

Usiamo questo metodo: conosciamo già le direzioni degli asintoti, ossia $R_\infty(1,-1,0)$ e $S_\infty(1,1,0)$. La loro lunghezza è $\sqrt{2}$. Avendo la stessa lunghezza, possiamo semplicemente sommare, ottenendo che una bisettrice ha direzione

$$X_\infty(2,0,0),$$

e quindi è $a_2 : y = -1$ (imponendo il passaggio per il centro). L'altra è quindi $a_1 : x = 1$.

□

**Esercizio** (10/11/15)**.** *Sia $S_2$ l'estensione complessa di un piano geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di un piano Euclideo reale $E_2$ con l'aggiunta della retta impropria. Si fissi un sistema coordinato in $S_2$ dedotto da un riferimento cartesiano ortonormale di $E_2$.*
*Si scriva un'equazione del fascio di coniche tangenti nel punto $P(1,-1)$ alla retta $t : y = -1$, passanti per l'origine e per $Y_\infty$. Si mostri che $\mathfrak{F}$ contiene un'unica parabola $\mathcal{P}$ e che $\mathcal{P}$ è caratterizzata dalla proprietà che ogni retta parallela all'asse $y$ ha in comune con $\mathcal{P}$ esattamente un punto proprio.*

**Svolgimento.** Abbiamo tre punti base, ossia $O, P$ e $Y_\infty$, dove $P$ è un punto doppio (ossia conosciamo la tangente in quel punto): dobbiamo scrivere l'equazione del fascio tangente di coniche con questi punti base. Le coniche degeneri del fascio sono

$$\{t, [O, Y_\infty]\}, \quad \{[P, O], [P, Y_\infty]\}.$$

Dunque, il fascio di coniche è

$$\mathfrak{F} : x(y+1) + k(x+y)(x-1) = 0.$$

Sviluppando i conti, si ottiene che

$$\mathfrak{F} : kx^2 + (1+k)xy + (1-k)x - ky = 0.$$

La matrice della più generale conica del fascio è

$$A(k) = \begin{pmatrix} k & \frac{1+k}{2} & \frac{1-k}{2} \\ \frac{1+k}{2} & 0 & -\frac{k}{2} \\ \frac{1-k}{2} & -\frac{k}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Per determinare le eventuali parabole del fascio si ponga uguale a 0 il minore principale $2 \times 2$, ossia

$$\frac{(1+k)^2}{4} = 0 \Rightarrow k = -1.$$

Dunque, c'è un'unica parabola $\mathcal{P}$ nel fascio. Dato che tutte le coniche del fascio passano per il punto improprio $Y_\infty$, segue che questo è necessariamente il centro di $\mathcal{P}$.

Dunque, tutte le rette parallele all'asse $y$ (che, in particolar modo, sono rette proprie) intersecano la conica in esattamente due punti (di cui uno è $Y_\infty$). Infatti, oltre la possibilità esclusa che la retta sia contenuta nella conica (visto che è non degenere), c'è la possibilità che la retta sia tangente. Visto che tutte queste rette passano per $Y_\infty$, in tal caso sarebbero tangenti nel centro della parabola, e quindi sarebbero la retta impropria. Dunque la retta è secante $\mathcal{P}$ in $Y_\infty$ ed un punto proprio (non ci sono altri punti impropri in $\mathcal{P}$).

Viceversa, supponiamo che $\mathcal{C}$ sia una conica del fascio con la proprietà richiesta, e proviamo che essa è $\mathcal{P}$. Sicuramente $\mathcal{C}$ non è nessuna delle due coniche degeneri, visto che entrambe contengono una retta parallela all'asse $y$ (che dunque interseca la conica in infiniti punti propri).

Per quanto riguarda le altre coniche non degeneri diverse da $\mathcal{P}$, esse sono tutte iperboli (perché passano per un punto improprio reale). In particolare, $Y_\infty$ è la direzione di uno dei due asintoti: tale asintoto è una retta parallela all'asse $y$ che non ha nessun punto proprio in comune con $\mathcal{C}$. Segue che nessuna iperbole può avere questa proprietà. Dunque $\mathcal{C}$ è per forza $\mathcal{P}$ (che, infatti, ha questa proprietà). □

**Esercizio** (12/01/16)**.** *Sia $S_2$ un'estensione complessa di un piano geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di un piano euclideo* *reale $E_2$ con l'aggiunta della retta impropria. Si fissi un sistema coordinato in $S_2$ dedotto da un riferimento ortonormale di $E_2$.*

*(a) Si scriva l'equazione del fascio $\mathfrak{F}$ di coniche le cui coniche non degeneri sono le parabole aventi per asse la retta $a : y = x$ e passanti per $P(1, 0)$.*

*(b) Si determini il punto proprio $H$ di $a$ che non è vertice di alcuna parabola di $\mathfrak{F}$.*

*(c) Mostrare che esiste una ed una sola proiettività*

$$\omega : \mathfrak{F} \to a$$

*tale che, per ogni parabola $\mathcal{C} \in \mathfrak{F}$, $\omega(\mathcal{C})$ coincida con il vertice di $\mathcal{C}$. Determinare quindi $\omega^{-1}(A_\infty)$ e $\omega^{-1}(H)$, essendo $A_\infty$ la direzione di $a$.*

**Svolgimento.**

(a) Se $a : x - y = 0$, si ha che la sua direzione è $A_\infty(1, 1, 0)$, che è anche il centro della parabola.

Poiché il vertice della parabola è il punto proprio di intersezione dell'asse con la parabola, esso avrà coordinate del tipo $V(k, k)$.

La polare del vertice, che è la retta tangente la parabola nel vertice, è ortogonale all'asse. Dunque, è la retta avente direzione $D_\infty(1, -1, 0)$ e passante per $V$. Essa è, cioè

$$P_V : x + y - 2k = 0.$$

Fissato $k$, scriviamo l'equazione del fascio di parabole che hanno asse $a$ e vertice $V(k, k)$. Esso è dato dal fascio bitangente le cui coniche degeneri sono $\{i_\infty, P_V\}$ e $\{a, a\}$. Cioè,

$$\mathfrak{F}_k : h(x - y)^2 + (x + y - 2k) = 0.$$

Imponendo ora il passaggio per $P(0, 1)$, troviamo la parabola $\mathcal{C}_k$ del fascio che soddisfa questa proprietà. Mettendole tutte insieme, al variare di $k$, esse formano il fascio cercato. Si ha:

$$h(0-1)^2 + (0+1-2k) = 0 \Rightarrow h = 2k-1.$$

Il fascio cercato è, dunque

$$\mathfrak{F} : x + y - 2k + (2k-1)(x-y)^2 = 0.$$

(b) Per costruzione, sappiamo che, se una parabola del fascio è individuata dal valore $k$, il suo vertice è il punto proprio $V(k,k)$. Visto che ogni parabola ha un vertice, dobbiamo pertanto determinare i valori di $k$ per i quali la conica corrispondente è degenere. Una volta scritto

$$\mathfrak{F} : (2k-1)x^2 + (2k-1)y^2 - 2(2k-1)xy + x + y - 2k = 0,$$

si ha che la matrice della generica conica del fascio è

$$A(k) = \begin{pmatrix} 2k-1 & 1-2k & \frac{1}{2} \\ 1-2k & 2k-1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2k \end{pmatrix}.$$

Imponendo che il determinante di $A(k)$ sia nullo, si ottiene

$$\det A(k) = 1 - 2k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Dunque, il punto proprio che cerchiamo è $H(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(c) Fissiamo due opportuni sistemi coordinati sulle rette geometriche proiettive coinvolte.

Una volta scritta l'equazione del fascio nella maniera seguente

$$\mathfrak{F} : x + y - (x-y)^2 + 2k((x-y)^2 - 1) = 0,$$

possiamo prendere il sistema coordinato su $\mathfrak{F}$ relativo alle coniche $\mathcal{C}_1 : 2((x-y)^2 - 1) = 0$ e $\mathcal{C}_2 : x + y - (x-y)^2 = 0$, dove la coordinata proiettiva non omogenea è

$$\xi(\mathcal{C}) : \begin{cases} k & \text{se } \mathcal{C} \neq \mathcal{C}_1 \\ \infty & \text{se } \mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \end{cases}.$$

Su $a$ fissiamo, invece, un sistema coordinato nel quale la coordinata proiettiva non omogenea è l'ascissa del punto. In tal caso, $\xi'(A_\infty) = \infty$.

Visto che, alla conica non degenere individuata dal parametro $k$ corrisponde il vertice di ascissa $k$, la trasformazione proiettiva cercata è quella di equazione lineare fratta:

$$\omega : \xi' = \xi.$$

In particolare, $\omega^{-1}(H)$ è la conica che corrisponde al valore $k = \frac{1}{2}$, ossia

$$\mathcal{C} : x + y - 1 = 0.$$

Infine, $\omega^{-1}(A_\infty) = \mathcal{C}_1$.

□

**Esercizio** (26/01/16)**.** *Sia $S_2$ un'estensione complessa di un piano geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di un piano euclideo reale $E_2$ con l'aggiunta della retta impropria. Si fissi un sistema coordinato in $S_2$ dedotto da un riferimento ortonormale di $E_2$.*
*Si scriva l'equazione del fascio di coniche $\mathfrak{F}$ le cui coniche non degeneri hanno centro nell'origine ed il punto $V(1,0)$ come vertice.*
*Si mostri inoltre che, tra le coniche non degeneri di $\mathfrak{F}$, le iperboli sono tutte e sole quelle che ammettono un fuoco $F$ appartenente all'asse contenente $V$ e tale che $d(O,F) > 1$.*

**Svolgimento.** Se $\mathcal{C}$ è una conica non degenere del fascio cercato, allora essa ammette la retta $a = [O,V] : y = 0$ come asse. Dato che il centro è un punto proprio, la conica è un'ellisse o un'iperbole. Dunque ammette sicuramente un altro vertice su $a$, simmetrico di $V$ rispetto al centro, ossia il punto $V'(-1,0)$. Inoltre, dato che le polari di ogni punto di un asse sono ortogonali all'asse stesso (per reciprocità, essendo un asse ortogonale al suo polo), si ha che le polari dei vertici (cioè le tangenti alla conica nei vertici) sono

$$P_V : x - 1, \quad P_{V'} : x + 1 = 0.$$

Segue che il fascio che cerchiamo è il fascio bitangente

$$\mathfrak{F} : (x-1)(x+1) + ky^2 = 0,$$

ossia, sviluppando i calcoli,

$$\mathfrak{F} : x^2 + ky^2 - 1 = 0.$$

In questo fascio, le iperboli sono caratterizzate dalla condizione $k < 0$.
Cominciamo col supporre che $\mathcal{C} \in \mathfrak{F}$ sia un'iperbole.
In tal caso, sicuramente i fuochi si trovano sullo stesso asse che contiene i due vertici, ossia $a : y = 0$. Sia $F(\alpha, 0)$ un fuoco. Si ha che necessariamente $\alpha \neq 1, -1$, visto che un fuoco non è un vertice. Proviamo che $|\alpha| > 1$.
Sappiamo che le rette isotrope per $F$ sono tangenti la conica. Consideriamo pertanto il sistema

$$\begin{cases} y = \pm i(x-\alpha) \\ x^2 + ky^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm i(x-\alpha) \\ (1-k)x^2 + 2\alpha kx - (k\alpha^2 + 1) = 0 \end{cases}.$$

Dato che la condizione di tangenza è vera, si ha che il discriminante dell'equazione di secondo grado è 0, ossia

$$0 = \alpha^2 k^2 + (k\alpha^2 + 1)(1-k) = k\alpha^2 - k + 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha^2 - 1} = -k > 0.$$

Da questo segue che $|\alpha| > 1$.
Viceversa, se $\mathcal{C} \in \mathfrak{F}$ ha un fuoco su $a : y = 0$ che dista più di 1 dall'orgine, possiamo svolgere gli stessi identici conti, e ottenere come prima che

$$k = -\frac{1}{\alpha^2 - 1} < 0.$$

Un'altra possibilità per svolgere questa seconda parte è quella di utilizzare il concetto di eccentricità. L'iperbole è caratterizzata dalla condizione

$$d(P, F)^2 > d(P, P_F)^2,$$

dove $F$ è un fuoco, $P_F$ è la sua polare, e $P$ è un punto arbitriario dell'iperbole.

Sfruttiamo questa proprietà.
Supponiamo che $\mathcal{C} \in \mathfrak{F}$ sia un'iperbole. Come già osservato, $F \in a$. Dunque $F$ ha coordinate $F(\alpha, 0)$, dove $\alpha \neq 1, -1, 0$ (non è 0 perché il centro di un'iperbole non è un fuoco).
Allora $P_F : \alpha x - 1 = 0$. Si ha che

$$d(V,F)^2 = (\alpha - 1)^2,$$

$$d(V,P_F) = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha^2}.$$

Da $d(V,F)^2 > d(V,P_F)^2$ segue che $\alpha^2 > 1$, ossia $d(O,F) = |\alpha| > 1$.
Viceversa, assumendo che $\mathcal{C} \in \mathfrak{F}$ abbia fuoco del tipo $F(\alpha, 0)$ con $|\alpha| > 1$, allora $\alpha \neq 0, 1, -1$.
Inoltre, ripercorrere gli stessi conti al contrario ci dice che

$$d(V,F)^2 > d(V,P_F)^2.$$

Dato che vale per un punto della conica, questa disuguaglianza deve valere per tutti gli altri punti. Ma questo ci dice che $\mathcal{C}$ è un'iperbole. □

**Esercizio** (08/06/16)**.** *Sia $S_2$ un'estensione complessa di un piano geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di un piano euclideo reale $E_2$ con l'aggiunta della retta impropria.*

(a) *Si scriva un'equazione del fascio $\mathfrak{F}$ di coniche le cui coniche non degeneri hanno centro sulla retta $r : y = 3x$, passano per l'origine ed ammettono la seguente come equazione dell'involuzione dei diametri coniugati:*

$$mm' - 1 = 0.$$

*Si classifichino tutte le coniche del fascio, comprese quelle degeneri.*

(b) *Siano $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ le coniche degeneri del fascio, di cui $\mathcal{C}_1$ contenente la retta impropria. Stabilire che l'applicazione*

$$\omega : \mathfrak{F} \to r$$

*che associa ad ogni conica non degenere di $\mathfrak{F}$ il proprio centro e tale che*

$$\omega(\mathcal{C}_1) = O, \omega(\mathcal{C}_2) = R_\infty$$

*dove $R_\infty$ è la direzione di $r$, non è una trasformazione proiettiva.*

**Svolgimento.**

(a) Dato che l'equazione dell'involuzione dei diametri coniugati, nel sistema coordinato su $\mathfrak{F}(C)$ (ove $C$ è il centro della conica) in cui la coordinata proiettiva non omogenea è il coefficiente angolare, è

$$a_{22}mm' + a_{12}(m + m') + a_{11} = 0,$$

ove $A = (a_{ij})$ è la matrice della conica, segue che il minore principale delle coniche non degeneri del fascio cercato è

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Dunque tutte le coniche non degeneri sono iperboli. In particolare, sappiamo che gli asintoti sono i punti fissi dell'involuzione dei diametri coniugati. Imponendo $m = m'$, si ha

$$m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1.$$

Dunque, se il centro è $C(k, 3k)$, gli asintoti sono

$$a_1 : x - y + 2k = 0, \quad a_2 : x + y - 4k = 0.$$

Consideriamo, fissato $k$, il fascio bitangente di iperboli di asintoti $a_1$ e $a_2$. Esso è

$$\mathfrak{F}_k : (x - y + 2k)(x + y - 4k) + h = 0.$$

Imponendo il passaggio per $O$, segue che $h = 8k^2$.

Dunque, il fascio cercato è

$$\mathfrak{F} : x^2 - y^2 - 2kx + 6ky = 0.$$

La matrice della generale conica del fascio è

$$A(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k \\ 0 & -1 & 3k \\ -k & 3k & 0 \end{pmatrix}.$$

Essendo $\det(A(k)) = 10k^2$, segue che per $k = 0$ otteniamo una conica non degenere,

$$\mathcal{C}_2 : x^2 - y^2 = 0.$$

Invece, per $k = \infty$ si ottiene la conica

$$\mathcal{C}_1 = x - 3y = 0,$$

che contiene la retta impropria. Entrambe le coniche degeneri sono semplicemente degeneri.

(b) Sul fascio $\mathfrak{F}$ consideriamo il sistema coordinato in cui la coordinata proiettiva non omogenea è il parametro $k$ che individua univocamente la conica, ossia

$$\xi(\mathcal{C}) = \begin{cases} k & \text{se } \mathcal{C} \neq \mathcal{C}_1 \\ \infty & \text{se } \mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \end{cases}.$$

Su $r$ consideriamo il sistema coordinato in cui la coordinata proiettiva non omogenea di un punto è l'ascissa del punto. In tal caso, $\xi'(R_\infty) = \infty$.

Supponiamo che il parametro $k$ individui una conica non degenere (ossia $k \neq 0, \infty$). Per costruzione, le coordinate del suo centro sono $C(k, 3k)$. In tal caso, $\xi' = k = \xi$.

Dunque, esiste una ed una sola trasformazione proiettiva che associa ad ogni conica non degenere del fascio il suo centro, ed è data, nei sistemi coordinati fissati, dall'equazione

$$\omega' : \xi' = \xi.$$

Tuttavia dall'equazione risulta $\omega'(\mathcal{C}_1) = R_\infty$, e $\omega'(\mathcal{C}_2) = O$. Dunque $\omega \neq \omega'$.

Segue che $\omega$ non può essere una trasformazione proiettiva, dal momento che, se lo fosse, coinciderebbe con $\omega'$, per il Teorema di unicità.

$\square$

**Esercizio** (05/09/16). *Sia $S_2$ un'estensione complessa di un piano geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di un piano euclideo reale $E_2$ con l'aggiunta della retta impropria. Si fissi un sistema coordinato in $S_2$ dedotto da un riferimento ortonormale di $E_2$.*
*Si scriva l'equazione del fascio di coniche $\mathfrak{F}$ di $S_2$ passanti per $A(1,0)$, le cui coniche non degeneri ammettono l'asse delle ascisse e la retta $r : y = x$ come diametri coniugati.*
*Si verifichi inoltre che ogni conica del fascio che ammette un asse con con coefficiente angolare $0 < m < 1$ è un'ellisse.*

**Svolgimento.** Sia $\mathcal{C}$ una generica conica non degenere del fascio che vogliamo determinare. Scriviamo la sua matrice generale

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

La prima informazione che sfruttiamo è che $s : y = 0$ e $r : y = x$ sono diametri: segue che l'origine $O$ è il centro della conica. Visto $P_O = i_\infty : t = 0$, si deve avere che la riga

$$(0, 0, 1)A$$

è proporzionale a $(0, 0, 1)$, ossia $a_{13} = a_{23} = 0$.
Inoltre, scelto su $\mathcal{F}(O)$ un sistema coordinato in cui la coordinata proiettiva non omogenea di una retta è il suo coefficiente angolare, si ha che l'involuzione dei diametri coniugati ha equazione

$$\omega : a_{22}mm' + a_{12}(m + m') + a_{11} = 0.$$

Imponendo che $s$ e $r$ siano coniugate (ossia imponendo $m' = 1, m = 0$), si ha che

$$a_{12} = -a_{11}.$$

Dunque la matrice è nella forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{11} & 0 \\ -a_{11} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Infine, imponendo che $A \in \mathcal{C}$, ossia che $(1, 0, 1)$ annulli la forma quadratica associata alla matrice, si ottiene anche la relazione

$$a_{33} = -a_{11}.$$

A questo punto abbiamo due parametri: possiamo omogeneizzare rispetto a uno dei due (ossia dividiamo per uno dei due parametri). Per esempio, osservando che per $a_{11} = 0$ si ottiene una conica degenere (il rango diventa 1), possiamo dividere per $a_{11}$. La matrice della conica diventa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e pertanto il fascio cercato è

$$\mathfrak{F} : x^2 + ky^2 - 2xy - 1 = 0.$$

Si osservi che le coniche degeneri si ottengono, oltre che per $k = \infty$ (caso escluso quando abbiamo effettuato la divisione per $a_{11}$) per $k = 1$.
Supponiamo ora che $\mathcal{C} \in \mathfrak{F}$ sia non degenere e ammetta un asse con coefficiente angolare $0 < m < 1$.
Osserviamo che il fascio non ammette ovviamente parabole (il centro è un punto proprio). In particolare, tutte le coniche non degeneri ammettono due assi ortogonali: essi sono gli unici due diametri coniugati ortogonali.

L'equazione dell'involuzione dei diametri coniugati è

$$kmm' - (m + m') + 1 = 0.$$

Se $m$ è il coefficiente angolare dell'asse, l'equazione è soddisfatta per $m' = -\frac{1}{m}$. Sostituendo e svolgendo i conti si ricava che

$$k = 1 - m + \frac{1}{m} > 1,$$

dal momento che $1 - m > 0$ e $\frac{1}{m} > 1$.
Dal momento che il minore principale $2 \times 2$ è $k - 1 > 0$. risulta che $\mathcal{C}$ è un'ellisse. $\square$

**Esercizio** (01/02/17)**.** *Sia $S_2$ un'estensione complessa di un piano geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di un piano euclideo reale $E_2$ con l'aggiunta della retta impropria. Si fissi un sistema coordinato in $S_2$ dedotto da un riferimento ortonormale di $E_2$.*
*Si determini l'equazione dell'iperbole equilatera avente per vertici i punti $V_1(1, 2)$ e $V_2(-1, -2)$.*

**Svolgimento.** Mostriamo tre modi di procedere:

1. Abbiamo che i due vertici di un'iperbole si trovano entrambi sullo stesso asse. Dunque, un asse dell'iperbole è

   $$a : 2x - y = 0.$$

   Le polari nei vertici sono ortogonali all'asse. Sono, rispettivamente,

   $$P_1 : x + 2y - 5 = 0, \quad P_2 : x + 2y + 5 = 0.$$

   Costruiamo il fascio bitangente di coniche tangenti a $P_1$ e $P_2$ in $V_1$ e $V_2$ rispettivamente, ossia

   $$\mathfrak{F} : (x + 2y + 5)(x + 2y - 5) + k(2x - y)^2 = 0.$$

Una volta svolti i conti e ottenuta l'equazione

$$\mathfrak{F} : (4k+1)x^2 + (4+k)y^2 + 4(1-k)xy - 25 = 0,$$

sappiamo che affinché un'iperbole sia equilatera, deve valere $a_{11}+a_{22} = 0$, dove $A = (a_{ij})$ è la matrice della conica, ossia, in questo caso,

$$4k + 1 + 4 + k = 0 \Rightarrow k = -1.$$

L'iperbole cercata è

$$\mathcal{C} : 3x^2 - 3y^2 - 8xy + 25 = 0.$$

2. Una volta osservato che un asse dell'iperbole (quello che contiene i vertici) ha direzione $A_\infty(1, 2, 0)$, l'altro deve avere direzione ortogonale, ossia $B_\infty(2, -1, 0)$.

   Possiamo procedere come nel quarto tipo di svolgimento mostrato in 03/09/15 per determinare le direzioni degli asintoti, che sono le bisettrici degli assi.

   Attenzione! Si osservi che, in generale, non è vero che le bisettrici degli assi di un'iperbole sono gli asintoti, ma è vero solo il viceversa, cioè che le bisettrici degli asintoti sono gli assi. Questa proprietà vale solo per le iperboli equilatere. Dunque, imponendo che gli asintoti siano bisettrici degli assi stiamo già usando tale condizione.

   Dato che $A_\infty$ e $B_\infty$ hanno la stessa lunghezza, cioè $\sqrt{5}$, possiamo semplicemente prendere la somma e la differenza per ottenere le direzioni degli asintoti, ossia

$$C_\infty(3, 1, 0), \quad D_\infty(1, -3, 0).$$

   In effetti, queste due direzioni sono ortogonali.

   Poiché il centro è punto medio dei due vertici, si deve avere che $O$ è il centro.

Abbiamo dunque gli asintoti dell'iperbole, che sono

$$a_1 : x - 3y = 0, \quad a_2 : 3x + y = 0.$$

L'iperbole cercata appartiene al fascio bitangente le cui coniche non degeneri sono le iperboli equilatere aventi come punti impropri $C_\infty$ e $D_\infty$ e centro l'origine, ossia

$$\mathfrak{F} : (x - 3y)(3x + y) + k = 0.$$

C'è un'ultima condizione che non abbiamo sfruttato: abbiamo usato il fatto che $V_1$ e $V_2$ dovessero essere vertici per conoscere uno dei due assi e il centro. Tuttavia, le ipotesi che abbiamo utilizzato sono solamente che essi sono due punti dell'asse simmetrici rispetto all'origine, ma non abbiamo mai davvero utilizzato il fatto che appartenessero alla conica. Basta imporre il passaggio per uno solo: il passaggio per l'altro è determinato automaticamente dal fatto che il centro è l'origine.

Imponendo, ad esempio, che $V_1(1, 2)$ appartenga alla conica, otteniamo

$$(1 - 6)(3 + 2) + k = 0 \Rightarrow k = 25.$$

Svolgendo i conti, si vede che la conica cercata è

$$\mathcal{C} : 3x^2 - 3y^2 - 8xy + 25 = 0.$$

3. Come nel punto precedente, stabiliamo che il centro è l'origine e che i due assi sono
$$a : y = 2x, \quad b : y = -\frac{1}{2}x.$$
Consideriamo su $\mathfrak{F}(O)$ un sistema coordinato in cui la coordinata proiettiva non omogenea di una retta è il coefficiente angolare.

   Dunque, se $A = (a_{ij})$ è la matrice della conica, l'equazione dell'involuzione dei diametri coniugati su $\mathfrak{F}(O)$ è

$$\omega : a_{22}mm' + a_{12}(m + m') + a_{11} = 0.$$

Visto che l'iperbole deve essere equilatera, deve valere $a_{11} = -a_{22}$. Inoltre, essendo gli assi diametri coniugati, l'equazione deve essere soddisfatta per $m = 2$, $m' = -\frac{1}{2}$. Si ha, pertanto

$$-a_{22} + \frac{3}{2}a_{12} - a_{22} = 0 \Rightarrow= 3a_{12} = 4a_{22}.$$

Segue, dividendo tutto per $a_{22}$, che l'equazione dell'involuzione dei diametri coniugati diventa

$$\omega : 3mm' + 4(m + m') - 3 = 0.$$

Infine, dato che $O$ è il centro, si deve avere che la riga

$$(0, 0, 1)A = (a_{13}, a_{23}, a_{33}),$$

che deve fornire i coefficienti dell'equazione di $i_\infty = P_O$, deve essere proporzionale a $(0, 0, 1)$. Segue che la matrice deve essere, a meno di riscalamenti e cambi di segno, del tipo:

$$A(k) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix},$$

che corrisponde al fascio di coniche

$$\mathfrak{F} : 3x^2 - 3y^2 - 8xy + k = 0.$$

Come nel punto precedente, l'appartenenza di $V_1$ ovvero di $V_2$ non è mai stata sfruttata. Imponendo, come prima, il passaggio, ad esempio, per $V_1(1, 2)$, si ottiene $k = 25$, e quindi

$$\mathcal{C} : 3x^2 - 3y^2 - 8xy + 25 = 0,$$

è l'iperbole cercata.

$\square$

**Esercizio** (23/06/17)**.** *Sia $S_2$ un'estensione complessa di uno spazio geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di un piano affine reale $A_2$ con l'aggiunta della retta impropria. Si fissi un sistema coordinato in $S_2$ dedotto da un riferimento affine di $A_2$.*
*Si determini un'equazione del fascio di coniche tale che, per ogni conica non degenere, la polare dell'origine rispetto alla conica è secante nei punti $A(1,0)$ e $B(0,1)$.*
*Stabilire se il fascio contiene parabole e scrivere le equazioni degli asintoti delle eventuali iperboli del fascio.*

**Svolgimento.** Per le proprietà delle rette polari, si ha che le tangenti condotte da $O$ alla conica sono esattamente le rette tangenti nei punti $A$ e $B$, ovvero $t_1 = [O, A]$ e $t_2 = [O, B]$ (che sono, rispettivamente, l'asse $x$ e l'asse $y$).
La retta congiungente i punti di tangenza (ossia $P_O$) è $P_O : x + y - 1 = 0$.
Possiamo allora scrivere l'equazione di un fascio bitangente, cioè

$$\mathfrak{F} : kxy + (x + y - 1)^2 = 0.$$

Una volta scritta l'equazione del fascio sviluppando i calcoli, ossia

$$\mathfrak{F} : x^2 + y^2 + (2 + k)xy - 2x - 2y + 1 = 0,$$

la matrice della più generale conica del fascio è

$$A(k) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2+k}{2} & -1 \\ \frac{2+k}{2} & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le eventuali paraboli sono caratterizzate dall'annullarsi del minore principale $2 \times 2$, ossia

$$1 - \frac{(2 + k)^2}{4} = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ oppure } k = -4.$$

Il primo valore non va bene, perché $k = 0$ individua una conica degenere. Il secondo va bene, e quindi nel fascio c'è un unica parabola.

Le iperboli sono caratterizzate dalla disequazione $1 - \frac{(2+k)^2}{4} < 0$, ossia

$$k < -4 \quad \vee \quad k > 0.$$

Per determinare gli asintoti dell'iperbole $\mathcal{I}_k$, procediamo nella seguente maniera:

- determiniamo i punti di $i_\infty \cap \mathcal{I}_k$, $A_\infty, B_\infty$, che saranno reali e distinti;
- determiniamo il centro $C$ di $\mathcal{I}_k$;
- gli asintoti saranno $[C, A_\infty]$ e $[C, B_\infty]$.

Si ha:

$$i_\infty \cap \mathcal{I}_k : \begin{cases} x^2 + y^2 + (2+k)xy = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado, per esempio, rispetto a $x$, trattando la $y$ come un parametro. Allora il discriminante è

$$\Delta = (2+k)^2 y^2 - 4y^2 = (k^2 + 4k)y^2,$$

dunque, si ottiene

$$x = \frac{-2 - k \pm \sqrt{k^2 + 4k}}{2} y.$$

Segue che $A_\infty$ e $B_\infty$ sono, posto $c_k^+ := \frac{-2-k+\sqrt{k^2+4k}}{2}$ e $c_k^- := \frac{-2-k-\sqrt{k^2+4k}}{2}$

$$A_\infty(c_k^+, 1, 0), \quad B_\infty(c_k^-, 1, 0).$$

Il centro è ottenuto intersecando $P_{X_\infty}$ e $P_{Y_\infty}$, ossia

$$C : \begin{cases} 2x + (2+k)y - 2 = 0 \\ (2+k)x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{2}{4+k}, \frac{2}{4+k}\right).$$

Dunque, gli asintoti sono

$$a_1 : x - c_k^+ y + 2\frac{c_k^+ - 1}{4+k} = 0$$

e

$$a_2 : x - c_k^- y + 2\frac{c_k^- - 1}{4+k} = 0.$$

□

# ESERCIZI DI TIPO 3

**Esercizio** (18/06/15)**.** *Sia $S_3$ un'estensione complessa di uno spazio geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di uno spazio Euclideo reale $E_3$ con l'aggiunta del piano improprio. Si fissi un sistema coordinato in $S_3$ dedotto da un riferimento ortonormale di $E_3$.*
*È data una quadrica $\mathcal{Q}$ reale, a punti reali, di rango 4, tale che*

$$\pi_{X_\infty} : z + 1 = 0, \quad \pi_{Y_\infty} : z - 1 = 0.$$

*(a) Stabilire che la retta $[X_\infty, Y_\infty]$ è contenuta in $\mathcal{Q}$.*

*(b) Classificare $\mathcal{Q}$.*

**Svolgimento.**

(a) Osserviamo che i punti $X_\infty(1, 0, 0, 0)$ e $Y_\infty(0, 1, 0, 0)$ appartengono ai rispettivi piani polari: anzi, entrambi i piani polari passano sia per $X_\infty$ sia per $Y_\infty$.

La prima affermazione ci dice che $X_\infty, Y_\infty \in \mathcal{Q}$. La seconda ci dice che $X_\infty, Y_\infty \in \pi_{X_\infty} \cap \pi_{Y_\infty}$.

Inoltre, anche $C \in \pi_{X_\infty} \cap \pi_{Y_\infty}$, ove $C$ denota il centro della quadrica.

Tuttavia, essendo i piani paralleli, essi si intersecano in una retta impropria $r_\infty$. In particolare, il centro $C_\infty$ di $\mathcal{Q}$ è un punto improprio. Dunque la quadrica è un paraboloide e contiene il suo centro.

Per quanto osservato, si ha che $X_\infty, Y_\infty, C_\infty \in \mathcal{Q} \cap r_\infty$.

Inoltre, i tre punti sono distinti: il centro non può coincidere né con $X_\infty$ né con $Y_\infty$ visto che né $\pi_{X_\infty}$ né $\pi_{Y_\infty}$ è il piano improprio.

Ma una retta non contenuta in una quadrica, non può intersecare tale quadrica in più di due punti. Segue che $r_\infty \subset \mathcal{Q}$. Ma, chiaramente $r_\infty = [X_\infty, Y_\infty]$.

(b) Per quanto visto nel punto (a), la quadrica $\mathcal{Q}$ è un paraboloide. La conica $\mathcal{C}_\infty$ è, in questo caso, $\pi_{C_\infty} \cap \mathcal{Q}$. Dunque, il paraboloide è ellittico se tale conica è unione di due rette complesse coniugate ovvero iperbolico se è unione di due rette reali e distinte (in ogni caso è sicuramente semplicemente degenere).

Ma, sempre per quanto provate nel punto (a), la conica contiene una retta reale, pertanto il paraboloide è iperbolico.

$\square$

**Esercizio** (12/01/16)**.** *Sia $S_3$ un'estensione complessa di uno spazio geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di uno spazio Euclideo reale $E_3$ con l'aggiunta del piano improprio. Si fissi un sistema coordinato in $S_3$ dedotto da un riferimento ortonormale di $E_3$.*
*Si classifichi la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione*

$$\mathcal{Q} : 2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 2x + 2y + 2z = 0.$$

*Determinare inoltre il piano principale di $\mathcal{Q}$ passante per $X_\infty$.*

**Svolgimento.** Cominciamo scrivendo la matrice della quadrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una volta osservato che l'origine $O$ appartiene alla quadrica e che esso ammette piano polare

$$\pi_O : x + y + z = 0,$$

si consideri la conica $\mathcal{C}_O = \pi_O \cap \mathcal{Q}$. Essa ha equazione

$$\mathcal{C}_O : \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 + 4xy = 0 \\ z = -x - y \end{cases}.$$

La sua matrice è

$$\mathcal{M}_O = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essa ha rango 2, quindi la conica è semplicemente degenere: la quadrica ha rango 4.
Per determinare la natura dei punti della quadrica dobbiamo capire se $\mathcal{C}_O$ è l'unione di due rette reali oppure complesse e coniugate: questo dipende dalla segnatura della matrice.
Possiamo diagonalizzare la quadrica con il metodo dei vettori non isotropi, o calcolare gli autovalori e vederne il segno. Procediamo con questo secondo metodo: gli autovalori sono le radici del polinomio

$$P(\lambda) = -\lambda(3-\lambda)(4-\lambda) - 4 = -\lambda(\lambda^2 - 7\lambda + 8).$$

Oltre la radice nulla, abbiamo

$$\lambda_1 := \frac{7+\sqrt{17}}{2} > 0, \quad \lambda_2 := \frac{7-\sqrt{17}}{2} > 0.$$

Essendo entrambi positivi, la matrice è semidefinita positiva: la conica è unione di due rette complesse coniugate, ovvero la quadrica ha punti ellittici.
Il suo centro è il punto di intersezione dei piani polari delle direzioni $X_\infty, Y_\infty, Z_\infty$, ossia

$$C : \begin{cases} 2x + 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Visto che $\pi_{Y_\infty}$ è parallelo a $\pi_{Z_\infty}$, allora sicuramente il centro sarà un punto improprio: segue che la quadrica è un paraboloide ellittico (equivalentemente, la conica $\mathcal{C}_\infty$ è semplicemente degenere).
Vogliamo ora determinare i piani principali. Determiniamo gli autovalori non nulli della matrice

$$\mathcal{M}_\infty = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essi sono le radici del polinomio

$$P(\lambda) = (2-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) = -\lambda(2-\lambda)^2.$$

Dunque, l'autovalore $\lambda = 2$ ha molteplicità due: abbiamo un fascio di piani principali. Determiniamo l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 2$, determinando il nucleo della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

che è definito dall'equazione

$$y + z = 0,$$

ed è, pertanto,

$$V_2 =< (1,0,0), (0,1,-1) > .$$

Due piani principali che generano il fascio sono, pertanto, i piani polari di $X_\infty(1,0,0,0)$ e $A_\infty(0,1,-1,0)$, ossia

$$\pi_{X_\infty} = 2x + 1 = 0, \quad \pi_{A_\infty} : y - z = 0.$$

Comunque, si vede subito che $X_\infty \in \pi_{A_\infty}$: questo è il piano principale che cerchiamo. $\square$

**Esercizio** (08/07/16)**.** *Sia $S_3$ un'estensione complessa di uno spazio geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di uno spazio Euclideo reale $E_3$ con l'aggiunta del piano improprio. Si fissi un sistema coordinato in $S_3$ dedotto da un riferimento ortonormale di $E_3$.*
*Si classifichi la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione*

$$\mathcal{Q} : 2x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 0.$$

*Si verifichi inoltre che per ogni piano diametrale reale $\alpha$, il polo di $\alpha$ non appartiene a $\mathcal{Q}$.*

**Svolgimento.** Cominciamo scrivendo la matrice della quadrica, ossia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che $O \in \mathcal{Q}$ ammette piano polare rispetto a $\mathcal{Q}$, ossia $\pi_O : z = 0$, e che

$$\mathcal{C}_O = \pi_O \cap \mathcal{Q} : \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

è una conica semplicemente degenere unione di due rette complesse coniugate, segue che $\mathcal{Q}$ ha rango 4 ed è a punti ellittici.
Il suo centro si ottiene intersecando i piani polari delle direzioni $X_\infty, Y_\infty, Z_\infty$, ossia

$$C : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}.$$

Il centro è quindi un punto proprio, ossia la quadrica è un iperboloide ellittico oppure un ellissoide.
Dato che la matrice della conica $\mathcal{C}_\infty$ è definita positiva (è già espressa in forma diagonale), segue che $\mathcal{Q}$ è un ellissoide.
Se ora prendiamo un qualsiasi piano diametrale reale $\alpha$ di $\mathcal{Q}$, allora il suo polo è una direzione reale $A_\infty(a, b, c, 0)$. Ma allora, sostituendo nell'equazione di $\mathcal{Q}$ di ottiene

$$2a^2 + b^2 + c^2 > 0.$$

Dunque $A_\infty \notin \mathcal{Q}$. □

**Esercizio** (20/09/16). *Sia $S_3$ un'estensione complessa di uno spazio geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di uno spazio Euclideo reale $E_3$ con l'aggiunta del piano improprio. Si fissi un sistema coordinato in $S_3$ dedotto da un riferimento ortonormale di $E_3$.*

*Si classifichi la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione:*

$$\mathcal{Q} : x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + 4yz + 2z = 0$$

*e si verifichi che $\mathcal{Q}$ ammette un piano principale perpendicolare alla retta $r$ di equazioni*

$$r : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

**Svolgimento.** Cominciamo scrivendo la matrice della quadrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Una volta osservato che l'orgine $O$ appartiene alla quadrica, si osservi che esiste anche il suo piano polare

$$\pi_O : z = 0.$$

Si consideri la conica $\mathcal{C}_O = \pi_O \cap \mathcal{Q}$, ossia

$$\mathcal{C}_O : \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Essa è evidentemente semplicemente degenere e unione di due rette complesse coniugate: segue che la quadrica ha rango 4 ed è a punti ellittici.
Calcoliamo il centro $C$ della quadrica come intersezione dei piani polari delle direzioni $X_\infty, Y_\infty, Z_\infty$, ossia

$$C : \begin{cases} x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ x + 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow C(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}).$$

Dato che il centro è proprio, la quadrica sarà un iperboloide ellittico oppure un ellissoide, a seconda che la conica $\mathcal{C}_\infty = \pi_\infty \cap \mathcal{Q}$ contenga o meno punti reali.

Questo dipende dalla segnatura della matrice

$$\mathcal{M}_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $q$ la forma quadratica associata alla matrice $\mathcal{M}_\infty$. Dato che $q(e_1, e_1) = 1 > 0$, il vettore $e_1$ è non isotropo.
Il sottospazio $< e_1 >^\perp$ rispetto a $\mathcal{M}_\infty$ è dato dal sistema

$$x + z = 0,$$

ossia $< e_1 >^\perp = < (0,1,0), (1,0,-1) >$ .
Il vettore $e_2$ è non isotropo e $q(e_2, e_2) = 1 > 0$. Il sottospazio $< e_2 >^\perp$ in $< e_1 >^\perp$ è dato dall'equazione

$$(0,1,0)\mathcal{M}_\infty(x, y, -x)^t = y - 2x = 0.$$

Dunque, una base diagonalizzante per $q$ è

$$\{e_1, e_2, (1,2,-1)\}.$$

In particolare, visto che $q((1,2,-1),(1,2,-1)) = -4 < 0$, si ha che la matrice è indefinita (ha segnatura $(2,1)$): la quadrica è un iperboloide ellittico.
Per quanto riguarda la seconda richiesta, iniziamo dal determinare i piani principali dell'iperboloide.
Cominciamo determinando gli autovettori della matrice $\mathcal{M}_\infty$.
Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 4) - (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 4).$$

Gli autovalori sono dunque $\lambda, 1+\sqrt{5}, 1-\sqrt{5}$. Essendo tre distinti e non nulli, l'iperboloide ha tre piani principali mutuamente ortogonali. Determiniamo quello ortogonale alla retta $r$. Determiniamo la direzione $R_\infty$ di $r$, per esempio prendendo la differenza tra le coordinate di due punti propri. Si ha che $R_\infty$ ha coordinate

$$(-2,1,0,1) - (-4,2,0,1) = (2,-1,0,0).$$

Si tratta dunque di stabilire se esiste un piano diametrale parallelo al piano

$$\pi : 2x - y = 0$$

(in realtà, osservando che questo piano passa per $C$, dovrà essere proprio questo).
Determiniamo gli autospazi relativi agli autovettori, calcolando il nucleo di $\mathcal{M}_\infty - \lambda I_3$. Si ha, svolgendo i conti,

$$V_1 =< (2, -1, 0) > .$$

A questo possiamo fermarci (evitando di calcolare gli autospazi relativi ai restanti autovalori irrazionali), visto che immediatamente riconosciamo la direzione che cercavamo, ossia $R_\infty(2, -1, 0, 0)$.
In particolare, il piano principale che cerchiamo è il piano polare di $R_\infty$, ossia

$$\pi' = \pi : 2x - y = 0,$$

come ci aspettavamo.
Alternativamente, data la richiesta, potevamo evitare di calcolare gli autovalori e gli autospazi: infatti, una volta determinata la direzione $R_\infty(2, -1, 0, 0)$, per rispondere affermativamente o negativamente alla domanda sarebbe bastato controllare se essa è o non è una direzione principale, ossia se $(2, -1, 0)$ è un autovettore di $\mathcal{M}_\infty$. Infatti, svolgendo i calcoli si vede, come già abbiamo osservato, che vale

$$\mathcal{M}_\infty(2, -1, 0)^t = (2, -1, 0)^t,$$

ossia è un autovettore relativo ad un autovalore non nullo (cioè $\lambda = 1$, ma questo è ininfluente). In tal caso, la risposta è dunque affermativa. □

**Esercizio** (16/02/17)**.** *Sia $S_3$ un'estensione complessa di uno spazio geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di uno spazio affine $A_2$ con l'aggiunta del piano improprio. Si fissi un sistema coordinato in $S_3$ dedotto da un riferimento affine di $A_3$.*

*È data una quadrica $\mathcal{Q}$ reale a punti reali, passante per $X_\infty, Y_\infty, Z_\infty$ ed un punto proprio $P$ tale che*

$$\pi_P = \pi_{Z_\infty}.$$

*Si classifichi $\mathcal{Q}$ sapendo inoltre che essa non passa per alcuno dei punti*

$$A_\infty(1,1,0,0), B_\infty(0,1,1,0), C_\infty(1,0,1,0).$$

**Svolgimento.** Dal momento che i punti $P$ e $Z_\infty$ sono distinti pur avendo lo stesso piano polare, la quadrica non può avere rango 4.
D'altro canto, in una quadrica di rango 1 nessun punto della quadrica ammette piano polare, mentre qui ci sono ben due punti che lo ammettono. Dunque il rango di $\mathcal{Q}$ può essere solo 2 oppure 3.
Supponiamo che il rango sia 2: allora la quadrica è unione di due piani distinti, diciamo $\pi_1$ e $\pi_2$. I punti della quadrica che ammettono piano polare sono quelli non appartenenti alla retta doppia. In tal caso, il loro piano polare coincide con il piano a cui appartengono. Dunque $\pi_P = \pi_{Z_\infty}$ è uno dei due piani che costituiscono la quadrica, diciamo $\pi_1$. In particolare, visto che tale piano contiene il punto proprio $P$, esso non è il piano improprio. Ora, possiamo anche escludere che $\pi_2$ sia $\pi_\infty$, dal momento che, in tal caso, $Z_\infty$ apparterrebbe alla retta doppia (intersezione dei due piani) e quindi non ammetterebbe piano polare.
Intersechiamo ora $\pi_1$ con $\pi_\infty$. Questa intersezione è una retta impropria $r_\infty$ che passa per $Z_\infty$.
Supponiamo che tale retta non passi né per $X_\infty$ né per $Y_\infty$. Allora, essendo essi punti impropri della quadrica, essi devono giacere nella retta impropria $s_\infty$ di intersezione del piano $\pi_2$ con $\pi_\infty$. Dunque $s_\infty = [X_\infty, Y_\infty]$. Tale retta, che è contenuta nella quadrica, ha equazione, nel sistema di riferimento fissato,

$$s_\infty : \begin{cases} z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Ma allora, si ha che $A_\infty \in s_\infty \subseteq \mathcal{Q}$, contro il fatto che $A_\infty \notin \mathcal{Q}$.

Pertanto, si deve avere che $X_\infty$ o $Y_\infty$ appartiene a $r_\infty$. Nel primo caso, si ha che $r_\infty = [Z_\infty, X_\infty]$, nel secondo, che $r_\infty = [Z_\infty, Y_\infty]$. Visto che $r_\infty \subset \mathcal{Q}$, questo è un assurdo visto che, analogamente a quanto vista prima, nel primo caso si avrebbe che $C_\infty$ appartiene alla quadrica, nel secondo che $B_\infty$ appartiene alla quadrica.

Dunque si deve avere necessariamente che $\mathcal{Q}$ ha rango 3, e dunque ha un vertice $V$, unico punto che non ammette piano polare.

Tale vertice, non è certamente né $P$ né $Z_\infty$, perché tali punti ammettono piano polare. Dalle proprietà dei coni quadrici, sappiamo che l'intersezione di $\pi_P$ (ovvero di $\pi_{Z_\infty}$) con la quadrica è una conica doppiamente degenere, la cui retta doppia è proprio $[P, V]$ (ovvero $[V, Z_\infty]$). Ma allora sono uguali le rette

$$[P, V] = [V, Z_\infty].$$

Segue che $P, V$ e $Z_\infty$ sono allineati, ossia $V \in [P, Z_\infty]$. Sicomme questa retta ha un unico punto improprio, che è $Z_\infty$, e questo è diverso da $V$, segue che $V$ è un punto proprio, e quindi $\mathcal{Q}$ è un cono propriamente detto. $\square$

**Esercizio** (07/09/17)**.** *Sia $S_3$ un'estensione complessa di uno spazio geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di uno spazio Euclideo reale $E_3$ con l'aggiunta del piano improprio. Si fissi un sistema coordinato in $S_3$ dedotto da un riferimento ortonormale di $E_3$.*
*È data una quadrica reale $\mathcal{Q}$ di rango 4, passante per i punti*

$$P_1(1, 1, 0), \quad P_2(2, 2, 0), \quad P_3(3, 3, 0)$$

*e avente i piani*

$$\pi_1 : x + y = 0, \quad \pi_2 : x + y + 1 = 0$$

*come piani diametrali. Si classifichi $\mathcal{Q}$.*

**Svolgimento.** Dato che i piani diametrali (che passano per il centro) sono paralleli, essi si intersecano in una retta impropria, a cui il centro della quadrica appartiene: se ne deduce che $\mathcal{Q}$ è sicuramente un paraboloide (perché il centro è improprio).

Si osservi ora che i tre punti propri $P_1, P_2, P_3$ sono allineati: essi giacciono sulla retta

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Dunque $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{Q} \cap r$. Visto che $r$ interseca $\mathcal{Q}$ in più di due punti, segue che $r \subset \mathcal{Q}$.
A questo punto sappiamo che, per le quadriche di rango 4 vale la seguente proprietà: se $Y \in r \cap \mathcal{Q}$, si ha che

$$r \subset \pi_Y \iff r \subset \mathcal{Q} \text{ oppure } r \cap \mathcal{Q} = \{Y\}.$$

Ma allora, per quanto osservato, si ha che $r$ è, per esempio, contenuta in $\pi_{P_1}$. In particolare, $r \subset \mathcal{C}_{P_1} = \pi_{P_1} \cap \mathcal{Q}$. Dunque la conica $C_{P_1}$ (che è semplicemente degenere) contiene una retta reale: segue che non è l'unione di due rette complesse coniugate, bensì di due rette reali.
Dunque $\mathcal{Q}$ è un paraboloide iperbolico. $\square$

**Esercizio** (21/09/17)**.** *Sia $S_3$ un'estensione complessa di uno spazio geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di uno spazio Euclideo reale $E_3$ con l'aggiunta del piano improprio. Si fissi un sistema coordinato in $S_3$ dedotto da un riferimento ortonormale di $E_3$.*
*Si consideri la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione:*

$$\mathcal{Q} : \alpha x^2 + \alpha^2 y^2 + \alpha^3 z^2 + 2x + 2y + 2z = 0,$$

*dove $\alpha \in \mathbb{R}$.*

*(a) Si classifichi $\mathcal{Q}$ al variare di $\alpha$.*

*(b) Determinare i valori di $\alpha$ per cui $\mathcal{Q}$ ammette infiniti piani principali.*

**Svolgimento.**

(a) Si consideri la matrice della quadrica individuata dal parametro $\alpha$

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prima di tutto osserviamo che se $\alpha = 0$, allora risulta

$$\mathcal{Q} : x + y + z = 0,$$

ossia $\mathcal{Q}$ è semplicemente degenere, unione del piano $\pi : x + y + z = 0$ e del piano improprio. Supponiamo allora che $\alpha \neq 0$.

L'origine $O$ appartiene alla quadrica. Il suo piano polare esiste sempre per ogni $\alpha$, ed è

$$\pi_O : x + y + z = 0.$$

Consideriamo la conica $\mathcal{C}_O = \pi_O \cap \mathcal{Q}$. Si ha, ricordando che $\alpha \neq 0$,

$$\mathcal{C}_O =: \begin{cases} \alpha x^2 + \alpha^2 y^2 + \alpha^3 z^2 = 0 \\ x = -y - z \end{cases} \Rightarrow \mathcal{C}_O : \begin{cases} (\alpha+1)y^2 + (\alpha^2+1)z^2 + 2yz = 0 \\ x = -y - z \end{cases}$$

La matrice della conica $\mathcal{C}_O$ è

$$\mathcal{M}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.

Essa ha rango almeno 1 e al massimo 2. Ha rango 1 se e solo se il minore principale $2 \times 2$ è nullo, ossia se e solo se

$$(\alpha+1)(\alpha^2+1) - 1 = 0 \iff \alpha^2 + \alpha + 1 = 0.$$

Visto che l'equazione $x^2 + x + 1 = 0$ non ha soluzioni reali, il rango è sempre 2. In particolare, la quadrica ha rango 4.

Determiniamo il centro della quadrica,

$$\{C\} = \pi_{X_\infty} \cap \pi_{Y_\infty} \cap \pi_{Z_\infty} : \begin{cases} \alpha x = -1 \\ \alpha^2 y = -1 \\ \alpha^3 z = -1 \end{cases} \Rightarrow C(-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\alpha^2}, -\frac{1}{\alpha^3}).$$

Dunque, il centro è un punto proprio, ossia $\mathcal{Q}$ è un ellissoide oppure un iperboloide.

La matrice della conica $\mathcal{C}_\infty$ è

$$\mathcal{M}_\infty = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^3 \end{pmatrix}$$

.

Visto che $\alpha \neq 0$, essa è sempre non degenere (come ci aspettavamo, visto che la quadrica deve essere un iperboloide o un ellissoide). Per capire se ha punti reali o no, occorre stabilire se la $\mathcal{M}_\infty$ ha segnatura costante o mista.

La matrice è già in forma diagonale, quindi è immediato stabilire cosa succede:

- se $\alpha > 0$, allora $\mathcal{M}_\infty$ è definita positiva (ellissoide);
- se $\alpha < 0$, allora $\mathcal{M}_\infty$ è indefinita (iperboloide).

Resta solo da stabilire la natura dei punti nel caso $\alpha < 0$, determinando la segnatura di $\mathcal{M}(\alpha)$.

Detta $q$ la forma quadratica associata a $\mathcal{M}(\alpha)$, dal momento che $q(e_2, e_2) = \alpha^2 + 1 > 0$, la matrice è definita positiva oppure indefinita.

Come già osservato $e_2$ è non isotropo.

Calcoliamo $< e_2 >^\perp$ rispetto a $\mathcal{M}(\alpha)$: esso è determinato dall'equazione

$$x + (\alpha^2 + 1)y = 0.$$

Dunque, $< e_2 >^\perp = < (-(\alpha^2 + 1), 1, 0), e_3 >$.

Il vettore $e_3$ è sicuramente isotropo. Per quanto riguarda il vettore $v := (-(\alpha^2 + 1), 1, 0)$, risulta che

$$q(v, v) = \alpha(\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha^2 + 1) < 0,$$

dato che $\alpha^2 + \alpha + 1 > 0$ e $\alpha < 0$. Ma allora la matrice è sempre indefinita: abbiamo punti iperbolici.

Riassumendo:

- se $\alpha = 0$, $\mathcal{Q}$ è semplicemente degenere;
- se $\alpha < 0$, $\mathcal{Q}$ è un iperboloide iperbolico;
- se $\alpha > 0$, $\mathcal{Q}$ è un ellissoide.

(b) Si tratta di stabilire i casi in cui la quadrica ammette un fascio o una stella di piani principali: considerata la matrice $\mathcal{M}_\infty$. questi due casi corrispondono, rispettivamente, alla presenza di un autovalore di molteplicità 2 oppure di molteplicità 3. Dato che la matrice è già espressa in forma diagonale, si vede subito che gli unici casi possibili sono $\alpha = -1$ (in cui abbiamo l'autovalore $-1$ con molteplicità doppia) e il caso $\alpha = 1$, in cui l'autovalore 1 ha molteplicità tripla.

Nel primo caso abbiamo un fascio di piani principali, oltre ad un piano principale ortogonale all'asse del fascio, corrispondente all'autovalore singolo 1.

Nel secondo caso abbiamo una stella di piani principali (infatti, per $\alpha = 1$ otteniamo una sfera).

In qualsiasi altro caso (ovviamente $\alpha = 0$ non è ammissibile, perché corrisponde ad una quadrica degenere) abbiamo tre autovalori distinti, e quindi solamente 3 piani principali distinti e mutualmente ortogonali.

□

**Esercizio** (11/04/18)**.** *Sia $S_3$ un'estensione complessa di uno spazio geometrico proiettivo reale, ottenuta da un'estensione complessa di uno spazio Euclideo reale $E_3$ con l'aggiunta del piano improprio. Si fissi un sistema coordinato in $S_3$ dedotto da un riferimento ortonormale di $E_3$. Si classifichi la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione:*

$$\mathcal{Q} : 2x^2 + z^2 + 6xz + 2x + 4z = 0$$

*e si determinino le equazioni delle rette contenute nella conica* $\mathcal{C}_\infty = \mathcal{Q} \cap \pi_\infty$.

**Svolgimento.** Cominciamo scrivendo la matrice della quadrica. Si ha

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una volta osservato che l'origine appartiene alla quadrica, si calcoli il suo piano polare

$$\pi_O : x + 2z = 0.$$

Dato che il piano polare di un punto della quadrica esiste, essa ha rango almeno 2.
Consideriamo l'intersezione di $\pi_O$ con la quadrica: si ha

$$\begin{cases} 2x^2 + z^2 + 6xz + 2x + 4z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

Dunque, $C_O$ è una conica doppiamente degenere di retta doppia l'asse $y$

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Segue che $\mathcal{Q}$ ha rango 3.
Determiniamo il suo vertice: si tratta dell'unico punto che non ammette piano polare. Questo si trova determinando il nucleo della matrice $A$ (che, avendo rango 3, avrà nucleo unidimensionale).
Si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3z + t \\ 0 \\ 3x + 2z + t \\ x \end{pmatrix} = 0$$

La cui soluzione è $(0, y, 0, 0)$, al variare di $y \in \mathbb{R}$. Dunque, il vertice è $V(0, 1, 0, 0)$. Essendo un punto improprio, la quadrica sarà un cilindro. Per classificare il tipo di cilindro, è necessario studiare la conica $C_\infty$, ossia

$$C_\infty : \begin{cases} 2x^2 + 6xz + z^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} .$$

La matrice di $C_\infty$ è

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2 (semplicemente degenere). Per capire se essa si decompone nel prodotto di due rette reali o di due rette complesse coniugate, occorre studiare la segnatura della matrice: se è (1,1) è il primo caso, se invece è (2,0) o (0,2) è il secondo caso.

Possiamo, per esempio, diagonalizzare la matrice con il metodo dei vettori non isotropi. Detta $q(X, X)$ la forma quadratica associata a $M$, si ha, per esempio, che il vettore $e_1 = (1, 0, 0)$ è certamente non isotropo (infatti, $q(e_1, e_1) = 2 > 0$).

Consideriamo il sottospazio $< e_1 >^\perp$ relativamente alla matrice $M$. Esso è dato dall'equazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x + 3z = 0.$$

Una base di questo sottospazio è, pertanto, data da $\{(0, 1, 0), (3, 0, -2)\}$.

Il primo vettore è isotropo, il secondo no. In particolare, detto $v := (3, 0, -2)$ si ha che $q(v, v) = -14 < 0$.

Dunque, una base diagonalizzante per la forma bilineare associata a $M$ è $\{e_1, v, e_2\}$, e si ha che la matrice associata è proprio

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha segnatura $(1,1)$. Dunque le rette in cui si spezza $C_\infty$ sono reali e distinte. Pertanto $\mathcal{Q}$ è un cilindro iperbolico.
Per determinare le due rette in cui si spezza la conica dobbiamo di fatto fattorizzare il polinomio $2x^2 + 6xz + z^2$ nel prodotto di due fattori di grado 1. Abbiamo appena trovato che è possibile farlo in maniera tale che i due fattori siano reali.
Il trucco è trattare, per esempio, la $x$ come un parametro e scomporre il polinomio rispetto a $z$ come se fosse di secondo grado in una variabile. Si determinano le radici. Il discriminante ridotto è

$$\frac{\Delta}{4} = 9x^2 - 2x^2 = 7x^2,$$

per cui troviamo

$$z_{1/2} = -3x \pm \sqrt{7}x = (-3 \pm \sqrt{7})x,$$

e quindi

$$z^2 + 6xy + 2x^2 = (z + (3 + \sqrt{7})x)(z + (3 - \sqrt{7})x).$$

Dunque, $C_\infty$ è l'unione delle rette

$$r : \begin{cases} z + (3 + \sqrt{7})x = 0 \\ t = 0 \end{cases}, s : \begin{cases} z + (3 - \sqrt{7})x = 0 \\ t = 0 \end{cases}.$$

□