Calcolo della primitiva di $\frac{1}{(1+x^2)^n}$

Marco Gallo*[1]

[1]Dipartimento di Matematica, Università di Bari, via E. Orabona, 4, I-70125 Bari - Italy

3 novembre 2019

Ci proponiamo di risolvere

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x. \tag{0.1}$$

Prima di iniziare, osserviamo che un qualsiasi integrale della forma

$$\int \frac{1}{(at^2+bt+t)^n}\,\mathrm{d}t$$

con $\Delta < 0$ è riconducibile, con semplici passaggi (i.e. *completamento del quadrato*, [1]) a un integrale della forma (0.1). Per completezza, mostriamo un esempio.

Esempio. Si consideri

$$\frac{1}{t^2+t+1}$$

con $\Delta = -3 < 0$, e concentriamoci sul solo denominatore. L'idea è quella di scriverlo nella forma $(\cdot)^2 + cost$, andando a *completare il quadrato* formato da $t^2 + t$ aggiungendovi (e sottraendovi) una costante. Esso dovrà risultare della forma $(t+a)^2 = t^2 + 2at + a^2$ per qualche $a \in \mathbb{R}$; ciò che ci guida quindi è il doppio prodotto: dovendo essere $2at = t$ allora sarà necessariamente $a = \frac{1}{2}$, e quindi si scriverà ($a^2 = \frac{1}{4}$)

$$t^2+t+1 = t^2+t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1 = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}+1 = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

L'obiettivo ora è scriverlo nella forma $(\cdot)^2 + 1$: basterà quindi mettere in evidenza la costante di troppo:

$$\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right).$$

Adesso però si ha di nuovo un problema, e cioè che il primo pezzo non è più un quadrato: per poter aggiustare le cose basterà portare la costante all'interno del quadrato:

$$\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right) = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1\right).$$

*email: `m.gallo29@studenti.uniba.it`; Stanza: 20, III piano.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI ALDO MORO — DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Siamo giunti alla forma desiderata: tornando all'integrale, basterà effettuare un cambio di variabile

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(t + \frac{1}{2}\right)$$

per ottenere

$$\int \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right)}\,\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Consolidato ciò, possiamo tornare al problema iniziale. Vi sono diversi modi per approcciarlo. Ne vediamo alcuni.

Primo metodo: Hermite. Questo metodo prevede di utilizzare la scomposizione di Hermite ([1]); essa infatti risulta utile in quanto fa scomparire tutte le potenze superiori a 1 nei denominatori, per farle ricomparire nella derivata, la quale non crea poi problemi nell'integrazione. Osserviamo che non è possibile applicare i fratti semplici, dato che è già nella forma finale del procedimento dei fratti semplici.

Otteniamo allora

$$\frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{Ax+B}{(1+x^2)} + \frac{d}{dx}\left(\frac{P(x)}{(1+x^2)^{n-1}}\right)$$

ove $P(x)$ è un polinomio di grado strettamente minore al grado del denominatore, cioè di grado minore o uguale a $2n-3$, e quindi dipendente da $2n-2$ parametri. Quindi, ad esempio, se $n=2$, avremo solo due parametri ($P(x) = Cx+D$, in aggiunta ad A e B), se $n=3$ avremo quattro parametri (sempre in aggiunta ad A e B). La risoluzione dell'integrale è a questo punto immediata (ricordato che, *rozzamente*, l'integrale della derivata di una funzione è la funzione stessa). Il problema è nei numerosi conti da effettuare per trovare tutti i parametri, i quali si ottengono calcolando la derivata e confrontando i polinomi.

Secondo metodo: sostituzione. Questo metodo, come il successivo, si rifà a successioni definite per ricorrenza. Vediamo come. La forma dell'integrale, cioè $1+(\cdot)^2$ ricorda la derivata della tangente, che è infatti $1+(\tan(t))^2$. Potrebbe allora essere utile applicare la sostituzione $x = \tan(t)$. Dopo opportuni conti otteniamo

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(1+\tan^2(t))^{n-1}}\,\mathrm{d}t = \int \cos^{2n-2}(t)\,\mathrm{d}t$$

ove l'ultima relazione è semplice conseguenza della definizione di tangente. A questo punto ci siamo ricondotti alla (nota) risoluzione dell'integrale

$$\mathcal{J}_m := \int \cos^m(t)\,\mathrm{d}t$$

con $m = 2n-2$. Per completezza la presentiamo ([1]). Spezzando la potenza (per $m \geq 2$), possiamo applicare l'integrazione per parti, ottenendo

$$\int \cos^m(t)\,\mathrm{d}t = \int \cos^{m-1}(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t = \cos^{m-1}(t)\sin(t) + (m-1)\int \cos^{m-2}(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Per ritornare a trattare solo il coseno, adesso, possiamo far uso della prima relazione fondamentale della goniometria, scrivendo $\sin^2(t) = 1-\cos^2(t)$, e ottenendo quindi

$$\int \cos^m(t) = \cos^{m-1}(t)\sin(t) + (m-1)\int \cos^{m-2}(t) - (m-1)\int \cos^m(t)\,\mathrm{d}t$$

cioè

$$\mathcal{J}_m = \cos^{m-1}(t)\sin(t) + (m-1)\mathcal{J}_{m-2} - (m-1)\mathcal{J}_m$$

da cui

$$\mathcal{J}_m = \tfrac{1}{m}\cos^{m-1}(t)\sin(t) + \tfrac{m-1}{m}\mathcal{J}_{m-2}$$

che conclude l'esercizio, osservato che sia $\mathcal{J}_0$ che $\mathcal{J}_1$ sono noti.

Terzo metodo: per parti. Vogliamo ragionare per ricorrenza, calcolando

$$\mathcal{I}_n := \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Per ricondurci a $\mathcal{I}_{n-1}$ bisogna abbassare il grado del denominatore e, per far ciò, possiamo far comparire $1+x^2$ al numeratore. Aggiungendo e sottraendo il pezzo mancante x^2, quindi, otteniamo

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Il primo integrale è proprio $\mathcal{I}_{n-1}$, concentriamoci quindi sul secondo. Se ci fosse x invece di x^2 otterremmo un integrale immediato dato che x è (quasi) la derivata della funzione interna di $(1+x^2)^{-n}$. Allora l'idea è quella di spezzare $x^2 = x \cdot x$ e applicare poi l'integrazione per parti:

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x\frac{2x}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\frac{(1+x^2)^{-n+1}}{-n+1} - \int \frac{(1+x^2)^{-n+1}}{-n+1}\,\mathrm{d}x\right)$$

dove osserviamo che l'ultimo pezzo è, nuovamente, $\mathcal{I}_{n-1}$. Mettendo insieme i pezzi otteniamo

$$\mathcal{I}_n = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-1}{2n-2}\mathcal{I}_{n-1}$$

che conclude l'esercizio, osservato che $\mathcal{I}_0$ è noto.

Osservazione. Notiamo che il secondo e il terzo metodo possono essere usati anche nel caso in cui n sia un multiplo di $\frac{1}{2}$: nel secondo metodo, infatti, $2n-2$ è ancora un elemento di $\mathbb{N}$. Nel terzo metodo, invece, con lo stesso procedimento ci si può ricondurre al caso $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, una cui primitiva è nota essere la funzione $\sinh^{-1}(x)$.

Riferimenti

[1] Sandra Lucente, *Tabelle per l'integrazione*, appunti del corso di Analisi 1-2 del Dipartimento di Matematica di Bari.