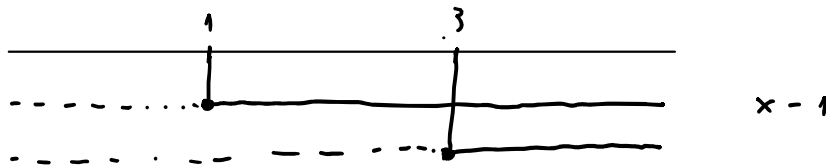


ESERCIZIO Risolvere la disequazione:

$$\frac{|x-1|}{x+2} \leq |x-3| + x+1$$

- Controlliamo i segni degli argomenti dei valori assoluti:



Ci sono tre casi da distinguere:

$$x < 1, \quad 1 \leq x < 3, \quad x \geq 3$$

la disequazione equivale a:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \left\{ \begin{array}{l} x < 1 \\ \frac{1-x}{x+2} \leq 3-x+x+1 \end{array} \right. & \vee \textcircled{2} \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq x < 3 \\ \frac{x-1}{x+2} \leq 3-x+x+1 \end{array} \right. \\ & \vee \textcircled{3} \left\{ \begin{array}{l} x \geq 3 \\ \frac{x-1}{x+2} \leq x-3+x+1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

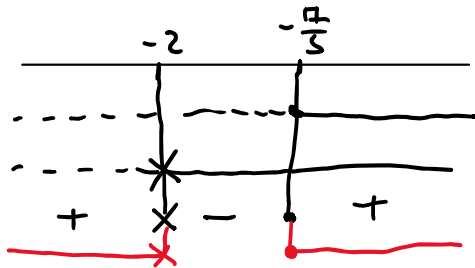
$$\textcircled{1} \left\{ \begin{array}{l} x < 1 \\ \frac{1-x}{x+2} \leq 4 \end{array} \right.$$

$$\frac{1-x-4(x+2)}{x+2} \leq 0$$

$$\frac{1-x-4x-8}{x+2} \leq 0$$

$$\frac{-5x - 7}{x + 2} \leq 0$$

$$\frac{5x + 7}{x + 2} \geq 0$$



$$x < -2 \vee x \geq -\frac{7}{5}$$

$$\begin{cases} x < 1 \\ x < -2 \vee x \geq -\frac{7}{5} \end{cases}$$

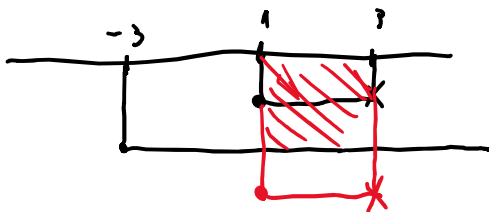
$$x < -2 \vee -\frac{7}{5} \leq x < 1,$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} 1 \leq x < 3 \\ \frac{x-1}{x+2} \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 3 \\ x-1 \leq 4(x+2) \end{cases}$$

la condizione $1 \leq x < 3$ implica $x+2 > 0$.
quindi si può moltiplicare per $x+2$.

$$\begin{aligned} x-1 &\leq 4x+8 \\ -9 &\leq 3x \\ -3 &\leq x \\ x &\geq -3 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 1 \leq x < 3 \\ x \geq -3 \end{cases}$$



$$1 \leq x < 3. \quad (\text{soluzione del sistema } \textcircled{2})$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} x \geq 3 \\ \frac{x-1}{x+2} \leq 2x-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x-1 \leq 2(x-1)(x+2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 1 \leq 2(x+2) \end{cases}$$



la condizione
 $x \geq 3$ implica

$x+2 > 0$ e
 $x-1 > 0$. Quindi
si può moltiplicare
per $x+2$ e poi
dividere per $x-1$.

$$1 \leq 2x + 4$$

$$2x \geq -3$$

$$x \geq -\frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$x \geq 3.$

Soluzione finale:

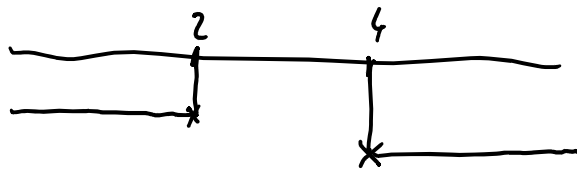
$$x < -2 \vee -\frac{7}{5} \leq x < 1 \vee 1 \leq x < 3 \vee x \geq 3$$

$$\text{cioè } x < -2 \vee x \geq -\frac{7}{5}$$

Nota Un sistema può anche non avere soluzioni

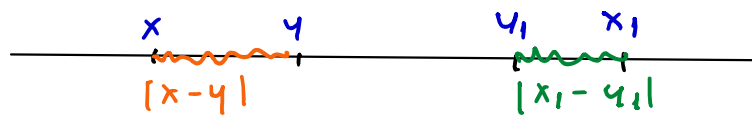
$$\begin{cases} x < 2 \\ x > 4 \end{cases}$$

impossibile.



PROP. DEL VALORE ASSOLUTO.

Il valore assoluto misura le distanze in $\mathbb{R}$



$|x - y|$ rappresenta la distanza tra x e y sulla retta reale.

oss

1) $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \geq 0.$

2) $\forall x \in \mathbb{R} : |x| = 0 \iff x = 0.$

3) $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$

e, se $y \neq 0$, $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

4) $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$ (DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE)
 $|x - y| \leq |x| + |y|$

$$\left(\begin{array}{l} |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| \\ \text{cioè la distanza tra } x \text{ e } y \text{ è minore o} \\ \text{uguale alla somma tra la distanza} \\ \text{di } x \text{ da } z \text{ e la distanza di } z \text{ da } y \end{array} \right)$$

5) $\forall x \in \mathbb{R} : |-x| = |x|$ e
 $|x|^2 = x^2 = (-x)^2$

Equazioni e disequazioni con radici.

Sono equazioni/disequazioni in cui

l'incognita compare sotto un segno di radice.

Tipo più semplice di equazioni con radice:

$$\sqrt[n]{a(x)} = b(x), \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

oss

Siano $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ e $a, b \in \mathbb{R}$:

• m dispari: $a = b \iff a^m = b^m$.

$$\sqrt[m]{a} = b \iff a = b^m$$

• Se m è pari:

$$a = b \not\iff a^2 = b^2$$

$\Rightarrow$

però se $a, b \geq 0$ e $m \geq 2$ (pari):

$$a = b \iff a^m = b^m.$$

Questo ci fornisce un metodo per risolvere le equazioni

Metodo risolutivo per le equazioni con radice:

• Se m è dispari:

$$\sqrt[n]{a(x)} = b(x) \iff a(x) = b(x)^m$$

• Se m è pari:

$$\sqrt[n]{a(x)} = b(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) \geq 0 & (\text{COND. DI ESIST.}) \\ b(x) \geq 0 & (\text{COND. DI COMP. DEI SEGNI}) \\ a(x) = b(x)^n \end{cases}$$

Per questo tipo di equazioni la condizione di esistenza $a(x) \geq 0$ è implicata dall'uguaglianza $a(x) = b(x)^n$ poiché n è pari.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b(x) \geq 0 \\ a(x) = b(x)^n \end{cases}$$

ESEMPI

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sqrt[3]{2x^2 - x} = x \\ & 2x^2 - x = x^3 \\ & x^3 - 2x^2 + x = 0 \\ & x(x^2 - 2x + 1) = 0 \\ & x(x-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \sqrt{2x^2 - 3} = x \\ & \begin{cases} 2x^2 - 3 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 2x^2 - 3 = x^2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{condizione implicata dalla} \\ \text{terza equazione} \end{array} \right) \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 3 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases} \\ & \quad \quad \quad x = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Ci sono metodi simili anche per le disequazioni.

Se n è dispari:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a(x)} &\leq b(x) \iff a(x) \leq b(x)^n \\ \sqrt[n]{a(x)} &\geq b(x) \iff a(x) \geq b(x)^n \\ \sqrt[n]{a(x)} &> b(x) \iff a(x) > b(x)^n \\ \sqrt[n]{a(x)} &< b(x) \iff a(x) < b(x)^n\end{aligned}$$

Se n é par:

- $\sqrt[n]{a(x)} \leq b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) \leq b(x)^n \end{cases}$
- $\sqrt[n]{a(x)} < b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \text{ (ou } b(x) > 0) \\ a(x) < b(x)^n \end{cases}$
- $\sqrt[n]{a(x)} \geq b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) \geq b(x)^n \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) < 0 \end{cases}$
 $\iff \begin{cases} b(x) \geq 0 \\ a(x) \geq b(x)^n \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) < 0 \end{cases}$
- $\sqrt[n]{a(x)} > b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) > b(x)^n \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) < 0 \end{cases}$
 $\iff \begin{cases} b(x) \geq 0 \\ a(x) > b(x)^n \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) < 0 \end{cases}$

Esistono anche altri tipi di equazioni e disequazioni con radici. Ad esempio:

$$\sqrt[n]{a(x)} = \sqrt[m]{b(x)} \quad \text{con } n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}.$$

Per risolverla, vorremmo elevare alla K dove $K = \text{m.c.m.}(n, m)$.

Si può fare? dipende da n e m :

Ad esempio, se n e m sono entrambi pari:

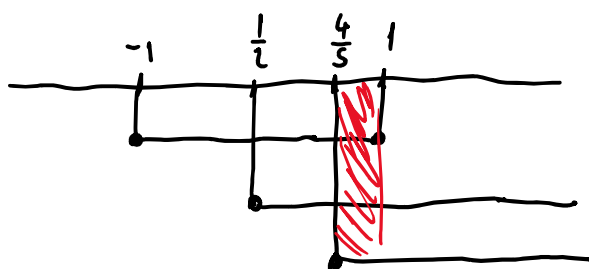
$$\sqrt[n]{a(x)} = \sqrt[m]{b(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x)^{\frac{K}{n}} = b(x)^{\frac{K}{m}} \end{cases} \quad \text{dove } K = \text{m.c.m.}(n, m).$$

ESEMPIO 1

$$\sqrt{1-x^2} \leq 2x-1$$

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ 1-x^2 \leq (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ \cancel{1-x^2 \leq 4x^2 - 4x + 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ 5x^2 - 4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ 5x - 4 \geq 0 \quad (x \geq \frac{4}{5}) \end{cases}$$



Soluzione: $\frac{4}{5} \leq x \leq 1$

ESEMPIO 2

$$\sqrt{1-x^2} \geq 2x-1$$

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ 1-x^2 \geq (2x-1)^2 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 2x-1 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 1-x^2 \geq (2x-1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 5x^2 - 4x \leq 0 \end{cases}$$

$$-1 \leq x < \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{4}{5}$$

$$\text{Soluzione: } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{4}{5} \quad \vee \quad -1 \leq x < \frac{1}{2}$$

$$\text{cioè} \quad : \quad -1 \leq x \leq \frac{4}{5}$$

Nota: quando si vuole rappresentare il segno di una quantità, bisogna tenere conto delle condizioni di esistenza

Rappresentare il segno di $\sqrt{x+1} - 2$

c. e: $x \geq -1$

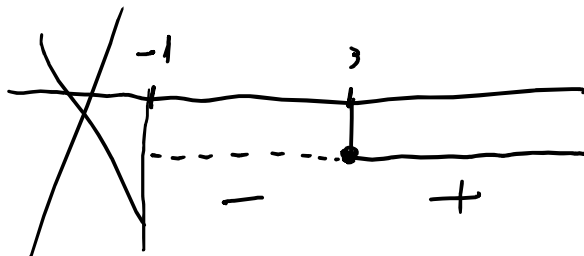
$$\sqrt{x+1} - 2 \geq 0$$

$$\sqrt{x+1} \geq 2$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x+1 \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$x \geq 3$$



ESERCIZIO

$$\sqrt{\frac{x^2+x-4}{x-1}} \geq 2-x$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} \frac{x^2+x-4}{x-1} \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ \frac{x^2+x-4}{x-1} \geq (2-x)^2 \end{cases}$$

$$\vee \textcircled{2} \begin{cases} \frac{x^2+x-4}{x-1} \geq 0 \\ 2-x < 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} 2-x \geq 0 \rightarrow x \leq 2 \\ \frac{x^2+x-4}{x-1} \geq (2-x)^2 \end{cases}$$

$$\frac{x^2+x-4}{x-1} - (2-x)^2 \geq 0$$

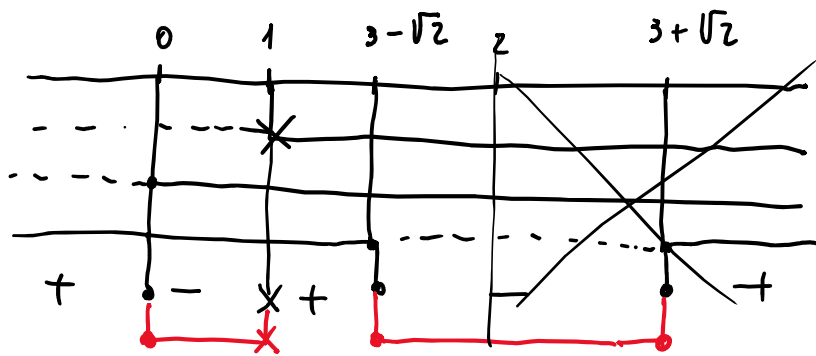
$$\frac{x^2+x-4 - (x-1)(4-4x+x^2)}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{x^2+x-4 - (4x-4x^2+x^3-4+4x-x^2)}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{-x^3+6x^2-7x}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 7x}{x-1} \leq 0 \quad \left(\text{or } \frac{x^3 - 6x^2 + 7x}{1-x} \geq 0 \right)$$

$$\frac{x(x^2 - 6x + 7)}{x-1} \leq 0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{2}$$



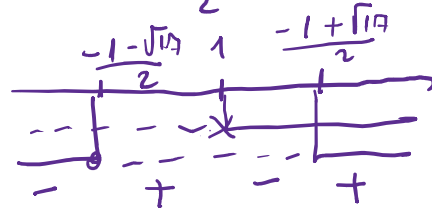
$$0 \leq x < 1 \quad \vee \quad 3 - \sqrt{2} \leq x \leq 3 + \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x < 1 & \vee & 3 - \sqrt{2} \leq x \leq 3 + \sqrt{2} \\ x \leq 2 \end{cases}$$

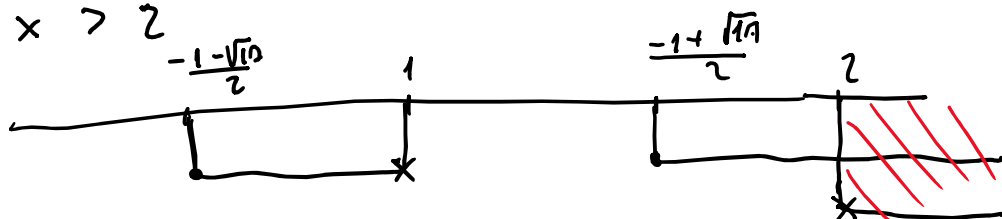
$$0 \leq x < 1 \quad \vee \quad 3 - \sqrt{2} \leq x \leq 2.$$

②

$$\begin{cases} \frac{x^2 + x - 4}{x-1} \geq 0 \\ 2 - x < 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$



$$\begin{cases} \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \leq x < 1 & \vee & x \geq \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ x > 2 \end{cases}$$



$$x > 2$$

Conclusion:

$$0 \leq x < 1 \quad \vee \quad \underbrace{3 - \sqrt{2} \leq x \leq 2}_{x \geq 3 - \sqrt{2}} \quad \vee \quad x > 2.$$

Logaritmi:

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Consideriamo l'eq.
 $a^x = y$.

TEOREMA Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

- Se $y \leq 0$ (e $a > 0$) l'equazione $a^x = y$ non ha soluzioni (vedi).
- Se $a = 1$, l'equazione è risolubile $\Leftrightarrow y = 1$ e in tal caso ogni $x \in \mathbb{R}$ è soluzione.
- Se $y > 0$ e $a > 0$, $a \neq 1$, allora $\exists! x \in \mathbb{R}$ t.c. $a^x = y$.

Def: Siano $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ e $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$.
 Definiamo **LOGARITMO IN BASE a DI y** l'unico
 $x \in \mathbb{R}$ t.c. $a^x = y$

Ricordare

- 1) La base a deve essere positiva e $\neq 1$.
- 2) $\log_a y$ si può definire solo se $y > 0$.
- 3) Se $a > 0$, $a \neq 1$, $y > 0$:
 $x = \log_a y \Leftrightarrow a^x = y$.

($\log_a y$ è l'unico esponente da dare ad a per ottenere y).

- $\log_2 16 = 4$ ($2^4 = 16$)
- $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5$ ($(\frac{1}{2})^{-5} = 2^5 = 32$)
- $\log_{10} 0,01 = -2$ ($10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$)
- $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$ ($(\sqrt{3})^4 = 3^2 = 9$).
- $\log_2 3$?

Notazioni particolari

- logaritmo in base e si dice **LOGARITMO NATURALE** e si indica con $\ln$ o $\log$
- logaritmo in base 10: **Log** (maiuscolo)

PROPRIETÀ DEI LOGARITMI:

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}: \log_a a^x = x$
- 2) $\forall x \in \mathbb{R}: a^{\log_a x} = x$
 $x > 0$
- 3) $\log_a 1 = 0$ e $\log_a a = 1$
- 4) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0:$
 $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$$\log_e \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$5) \forall x \in \mathbb{R}, x > 0: \log_e \frac{1}{x} = -\log_a x$$

$$6) \forall x, y \in \mathbb{R}, x > 0: \log_e x^y = y \log_a x$$

$$7) \forall x > 0: \log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$$

$$8) \forall x \in \mathbb{R}, x > 0, x \neq 1.$$

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

$$\left(a^l = x \Leftrightarrow a = x^{\frac{1}{l}} \right)$$

$$9) \forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \text{ e}$$

$$\forall b \in \mathbb{R}, b > 0, \text{ e } b \neq 1.$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$