

PRECORSO

mercoledì 16 settembre 2026 11:10

ESERCIZIO: Risolvere la disequazione:

$$\frac{x}{x+2} + \frac{2}{\underbrace{x^2+5x+6}_{(x+2)(x+3)}} \leq \frac{5}{x+3}$$

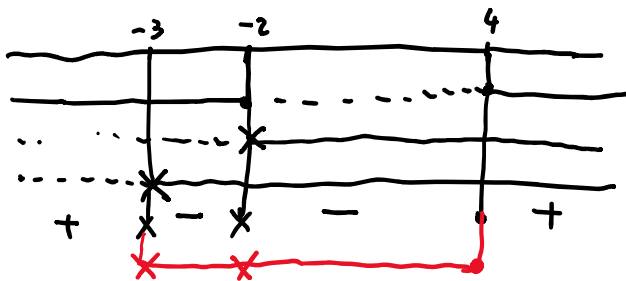
c.e: $x \neq -2 \wedge x \neq -3$

$$\frac{x}{x+2} + \frac{2}{(x+2)(x+3)} - \frac{5}{x+3} \leq 0$$

$$\frac{x(x+3) + 2 - 5(x+2)}{(x+2)(x+3)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 + 3x + 2 - 5x - 10}{(x+2)(x+3)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x - 8}{(x+2)(x+3)} \leq 0. \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$



Sol: $-3 < x < -2 \vee -2 < x \leq 4$

Metodo alternativo: semplificare il fattore comune ricordando le condizioni di esistenza

$$\frac{x^2 - 2x - 8}{(x+2)(x+3)} \leq 0$$

Nota che $x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4)$

$$\frac{(x+1)(x-4)}{(x+1)(x+3)} \leq 0$$

c.e. $x \neq -3 \wedge x \neq -2$

ES 2

$$\frac{x+9}{x^2+3} \geq \frac{9x-10}{2x^2-1}$$

$$\frac{x+9}{x^2+3} - \frac{9x-10}{2x^2-1} \geq 0$$

$$\frac{(x+9)(2x^2-1) - (9x-10)(x^2+3)}{(x^2+3)(2x^2-1)} \geq 0$$

$$\frac{2x^3 - x + 18x^2 - 9 - (9x^3 - 10x^2 + 27x - 30)}{(x^2+3)(2x^2-1)} \geq 0$$

$$\frac{-7x^3 + 28x^2 - 28x + 21}{(x^2+3)(2x^2-1)} \geq 0$$

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 4x - 3}{(x^2+3)(2x^2-1)} \leq 0.$$

$x^2+3 > 0$

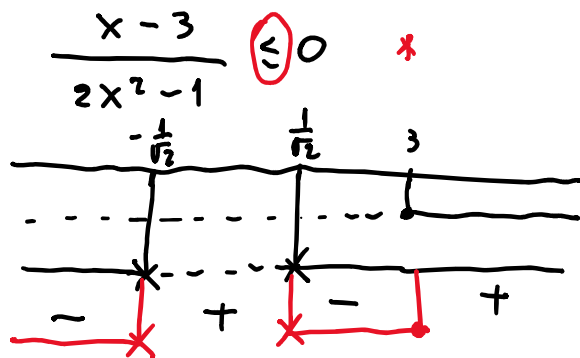
$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 3.$$

$$P(3) = 0$$

	1	-4	4	-3
3		3	-3	3
	1	-1	1	0

$$\frac{(x-3)(x^2-x+1)}{2x^2-1} \leq 0.$$

$\Delta < 0$
 $x^2 - x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$
 quindi si può dividere
 la disequazione
 per $x^2 - x + 1$.



$$x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \vee \quad \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 3.$$

Esercizio 3

$$\frac{5x^4 + 14x^2 - 3}{1 - 27x^3} > 0.$$

$$1 - 27x^3 = (1 - 3x)(1 + 3x + 9x^2) \quad \Delta < 0.$$

$$5x^4 + 14x^2 - 3 \geq 0 \quad t = x^2$$

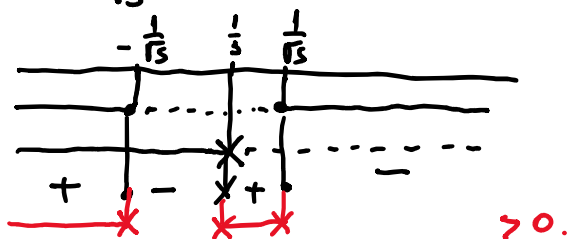
$$5t^2 + 14t - 3 \geq 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{49+15}}{5} = \begin{cases} \frac{1}{5} \\ -3 \end{cases}$$

$$t \geq \frac{1}{5} \quad \vee \quad t \leq -3$$

$$x^2 \geq \frac{1}{5} \quad \vee \quad x^2 \leq -3 \quad (\text{impossibile}).$$

$$x \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \vee \quad x \leq -\frac{1}{\sqrt{5}}$$



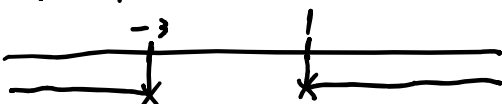
$$x < -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \vee \quad \frac{1}{3} < x < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Unioni di soluzioni di disequazioni.

Spesso utilizziamo sculture del tipo:

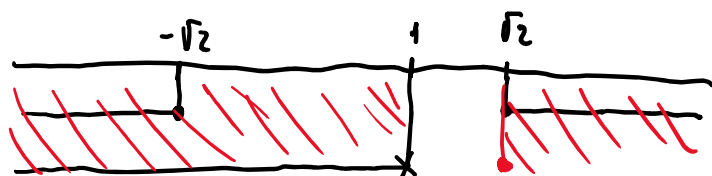
disequazione 1 $\vee$ disequazione 2.

• $x > 1 \vee x < -3$



A horizontal number line with two points marked: 1 and -3. At each point, there is an open parenthesis '(' and an arrow pointing outwards to the right for 1 and to the left for -3, representing the solution set $x > 1 \vee x < -3$.

• $x^2 - 2 \geq 0 \vee x < 1$
($x \geq \sqrt{2} \vee x \leq -\sqrt{2}$)



$x < 1 \vee x \geq \sqrt{2}$



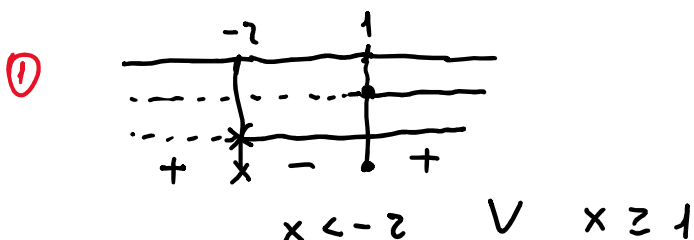
Sistemi di disequazioni / intersezione delle soluzioni di due o più disequazioni

$$\begin{cases} \text{disequazione 1} \\ \text{disequazione 2} \\ \vdots \end{cases}$$

Risolvere un sistema di disequazioni significa intersecare gli insiemi delle soluzioni delle singole disequazioni.

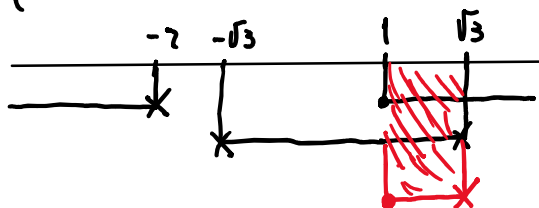
ESEMPLI

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+2} \geq 0 & \textcircled{1} \\ x^2 - 3 < 0 & \textcircled{2} \end{cases}$$



② $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

$$\begin{cases} x < -2 \quad \vee \quad x \geq 1 \\ -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases}$$



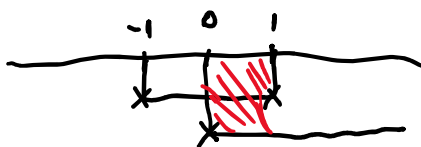
Graficamente il sistema si risolve rappresentando le singole soluzioni e selezionando le regioni comuni.

Soluzioni del sistema: $1 \leq x < \sqrt{3}$.

Nei sistemi si può usare una condizione per semplificare l'altra:

$$\begin{cases} x^3 - x < 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x > 0 \end{cases}$$



$$0 < x < 1$$

Attenzione

$$x^3 - x < 0 \quad \not\Leftrightarrow \quad x^2 - 1 < 0$$

ma:

$$\begin{cases} x^3 - x < 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Equazioni e disequazioni con valore assoluto.

Sono equazioni / disequazioni in cui l'incognita x compare all'interno di un valore assoluto.

Tipo più semplice di equazione con val. ass:

$$|a(x)| = b(x)$$

Per le disequazioni:

$$|a(x)| \geq b(x)$$

$$|a(x)| > b(x)$$

$$|a(x)| \leq b(x)$$

$$|a(x)| < b(x)$$

Ricordare che:

$$|a(x)| = \begin{cases} a(x) & \text{se } a(x) \geq 0 \\ -a(x) & \text{se } a(x) < 0. \end{cases}$$

Per risolvere $|a(x)| = b(x)$ bisogna distinguere i due casi: $a(x) \geq 0$ e $a(x) < 0$.

$$|a(x)| = b(x) \Leftrightarrow (|a(x)| = b(x)) \wedge \left(\begin{matrix} a(x) \geq 0 \\ \vee a(x) < 0 \end{matrix} \right)$$

$$\Leftrightarrow (|a(x)| = b(x) \wedge a(x) \geq 0)$$

$$\vee (|a(x)| = b(x) \wedge a(x) < 0)$$

$$\Leftrightarrow (a(x) = b(x) \wedge a(x) \geq 0)$$

$\vee$

$$(-a(x) = b(x) \wedge a(x) < 0)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} a(x) = b(x) \\ a(x) \geq 0 \end{cases}} \vee \begin{cases} -a(x) = b(x) \\ a(x) < 0 \end{cases}$$

sistema misto con una eq. e una disequazione: per risolvere basta risolvere l'equazione e verificare se le soluzioni soddisfano la disequazione (spesso non è neanche necessario risolvere la disequazione)

Metodo risolutivo basato sulla definizione

$$|a(x)| = b(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) = b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) = b(x) \end{cases}$$

ESEMPIO

Risoliamo: $|6x - 1| = 11x - 3$.

$$\begin{cases} 6x - 1 \geq 0 \\ 6x - 1 = 11x - 3 \end{cases} \vee \begin{cases} 6x - 1 < 0 \\ -6x + 1 = 11x - 3 \end{cases}$$

↳

$$2 = 5x$$

$$x = \frac{2}{5}$$

Risolvere la diseq?

$$6 \cdot \frac{2}{5} - 1 = \frac{12}{5} - 1 = \frac{7}{5} > 0 \quad \checkmark$$

Quindi $x = \frac{2}{5}$ è soluzione del primo sistema.

$$\hookrightarrow 17x = 4$$

$$x = \frac{4}{17}$$

soddisfa $6x - 1 < 0$?

$$\frac{24}{17} - 1 < 0 \quad \times$$

Falso.

Il secondo sistema non ha soluzioni

Unica soluzione dell'equazione $e^{-x} = \frac{2}{5}$

ESEMPIO

$$|x^2 - 4| = 2x + 1$$

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 - 4 = 2x + 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ -x^2 + 4 = 2x + 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \vee x \leq -2 \\ x = 1 \pm \sqrt{6} \end{cases}$$

$$1 + \sqrt{6} \geq 2 \quad \checkmark$$

$$1 - \sqrt{6} \leq -2 \quad ? \Leftrightarrow \sqrt{6} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow 6 \geq 9$$

$$\text{e } 1 - \sqrt{6} \geq 2 \quad \text{FALSO} \quad \text{FALSO} \quad \times$$

Unica soluzione del 1° sistema $e^{-x} = 1 + \sqrt{6}$

Soluzioni dell'eq. sono $x = 1 + \sqrt{6} \vee x = 1$.

$$\rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = 1 \vee x = -3$$

$$\begin{cases} -2 < x < 2 \\ x = 1 \vee x = -3 \end{cases}$$

Unica soluzione del secondo sistema e^{-x}

$$x = 1$$

Attenzione

Siano $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\bullet |a| = b \quad \not\Leftrightarrow \quad a = b \vee a = -b$$

$$\bullet |a| = b \wedge b \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ b \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -b \\ b \geq 0 \end{cases}$$

$$\bullet a = b \vee a = -b \Leftrightarrow |a| = |b|$$

oss la seconda equivalenza fornisce un metodo alternativo per la risoluzione delle eq. del tipo $|a(x)| = b(x)$.

$$\begin{cases} a(x) = b(x) \\ b(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) = -b(x) \\ b(x) \geq 0. \end{cases}$$

Note: questo secondo metodo è specifico per equazioni del tipo $|a(x)| = b(x)$. Il primo metodo, basato sulla definizione di $|a(x)|$, può invece essere esteso a qualsiasi equazione / disequazione in cui compare $|a(x)|$.

Il metodo basato sulla definizione si usa anche per risolvere le disequazioni

• $|a(x)| \geq b(x)$
equivali a:

$$\begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) \geq b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) \geq b(x) \end{cases}$$

In modo simile:

• $|a(x)| \leq b(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) \leq b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) \leq b(x) \end{cases}$

• $|a(x)| > b(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) > b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) > b(x) \end{cases}$

• $|a(x)| < b(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) < b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) < b(x) \end{cases}$

Più in generale dato una qualsiasi espressione $f(x, |a(x)|)$ che dipende da x e $|a(x)|$, si ha che

$$f(x, |a(x)|) \stackrel{(\leq, >, \geq, <)}{=} 0 \quad \text{equivala a}$$

$$\begin{cases} a(x) \geq 0 \\ f(x, a(x)) \stackrel{(\leq, >, \geq, <)}{=} 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ f(x, -a(x)) \stackrel{(\leq, >, \geq, <)}{=} 0 \end{cases}$$

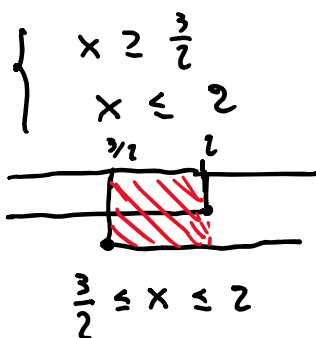
ESEMPIO

$$x - |2x - 3| \geq 1$$

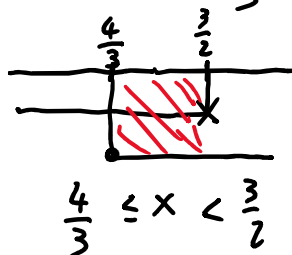
equivala a:

$$\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ x - (2x - 3) \geq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ x + \underbrace{2x - 3}_{-(-2x + 3)} \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ -x + 3 \geq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x \geq -2 \\ x \leq 2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ 3x \geq 4 \end{cases}$$



$$\text{Soluzioni: } \frac{3}{2} \leq x \leq 2 \vee \frac{4}{3} \leq x < \frac{3}{2}$$

$$\text{cioè } \frac{4}{3} \leq x \leq 2$$

oss Siano $a, b \in \mathbb{R}$: allora:

$$|a| \geq b \iff a \geq b \vee a \leq -b$$

$$|a| > b \iff a > b \vee a < -b$$

$$|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b \iff \begin{cases} a \leq b \\ a \geq -b \end{cases}$$

$$|a| < b \iff -b < a < b \iff \begin{cases} a < b \\ a > -b \end{cases}$$

Queste equivalenze forniscono metodi alternativi per risolvere le disequazioni del tipo: $|a(x)| \geq b(x)$ / $|a(x)| > b(x)$ / $|a(x)| \leq b(x)$ / $|a(x)| < b(x)$.

Nell'esempio precedente.

$$x - |2x - 3| \geq 1$$

$$-|2x - 3| \geq 1 - x$$

$$|2x - 3| \leq x - 1$$

$$-x + 1 \leq 2x - 3 \leq x - 1$$

$$\begin{cases} 2x - 3 \leq x - 1 \\ 2x - 3 \geq -x + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 2 \\ 3x \geq 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases} \iff \frac{4}{3} \leq x \leq 2.$$

ESEMPIO

Risoluiamo

$$\frac{|4x - 3|}{x - 2} \leq x$$

Non è un dis. del tipo $|a(x)| \leq b(x)$ ($\leq, <, >$) quindi usiamo il metodo basato sulla definizione.

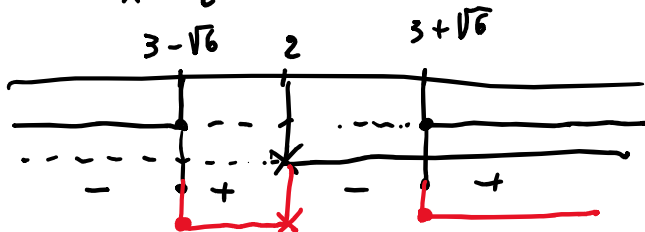
$$\begin{cases} 4x - 3 \geq 0 \\ \frac{4x - 3}{x - 2} \leq x \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} 4x - 3 < 0 \\ \frac{-4x + 3}{x - 2} \leq x \end{cases}$$

$$\frac{4x - 3 - x^2 + 7x}{x - 2} \leq 0$$

$$\frac{-x^2 + 6x - 3}{x - 2} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 6x + 3}{x - 2} \geq 0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-3} = 3 \pm \sqrt{6}$$



$$3 - \sqrt{6} \leq x < 2 \quad \vee \quad x \geq 3 + \sqrt{6}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ 3 - \sqrt{6} \leq x < 2 \quad \vee \quad x \geq 3 + \sqrt{6} \end{cases}$$

Attenzione a posizionare bene $\frac{3}{4}$:

$$\frac{3}{4} \leq 3 - \sqrt{6} \quad ?$$

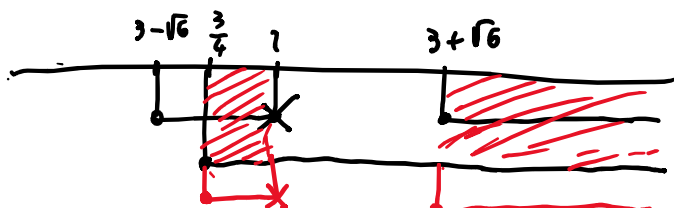
$$\sqrt{6} \leq 3 - \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{6} \leq \frac{9}{4}$$

$$6 \leq \frac{81}{16}$$

$$6 \cdot 16 \leq 81$$

$$96 \leq 81 \quad \text{falso!}$$



$$\frac{3}{4} \leq x < 2 \quad \vee \quad x \geq 3 + \sqrt{6}$$

Passiamo al secondo sistema

$$\begin{cases} x < \frac{3}{4} \\ \frac{-4x+3}{x-2} \leq x \end{cases}$$

$x < \frac{3}{4} \Rightarrow x-2 < 0$
Si può moltiplicare
per $x-2$ invertendo
il verso della
disuguaglianza.

$$\begin{cases} x < \frac{3}{4} \\ -4x+3 \geq x(x-2) \end{cases}$$

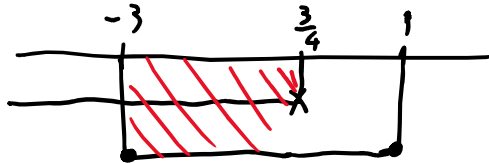
$$-4x+3 \geq x^2-2x$$

$$x^2+2x-3 \leq 0$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{4} = \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix}$$

$$-3 \leq x \leq 1$$

$$\begin{cases} x < \frac{3}{4} \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



$$-3 \leq x < \frac{3}{4}$$

Sol. delle disuguaglianze:

$$-3 \leq x < \frac{3}{4} \quad \vee \quad \frac{3}{4} \leq x < 2 \quad \vee \quad x \geq 3+\sqrt{6}$$

$$-3 \leq x < 2 \quad \vee \quad x \geq 3+\sqrt{6}.$$

Ultima raccomandazione:

Non fate calcoli se non è necessario

Ci sono equazioni / disuguaglianze
immediate per cui non serve
distinguere casi.

- $|x^2 - 7| = -3$ impossibile.
(un valore assoluto non può essere negativo)

$$|x - 3| + x^2 > 0 \quad \text{vero} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- (somma di termini ≥ 0 che non si annullano nello stesso punto.)