

Rappresentazioni decimali.

Def: Un **ALLINEAMENTO DECIMALE** è una scrittura del tipo $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, d_1 d_2 d_3 \dots$ dove $n \in \mathbb{N}$ e $a_0, a_1, \dots, a_n, d_1, d_2, d_3, \dots \in S := \{0, 1, \dots, 9\}$.

172,25161728...

Def: Un all. decimale si dice **FINITO** se $\exists M \in \mathbb{N}, M \geq 1$, tale che $d_j = 0 \forall j \geq M$.
In tal caso gli infiniti zeri finali si possono omettere.

0,2130000000... = 0,213.

Gli all. decimali forniscono una possibile rappresentazione di $\mathbb{R}$.

Ogni allineamento finito si può considerare come un numero reale (in realtà, anche razionale):

$$\begin{aligned} & a_n \dots a_1 a_0, d_1 \dots d_M \\ &= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \\ & \quad + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \dots + \frac{d_M}{10^M} \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \cdot 10^k + \sum_{h=1}^M d_h \cdot \frac{1}{10^h} \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}. \end{aligned}$$

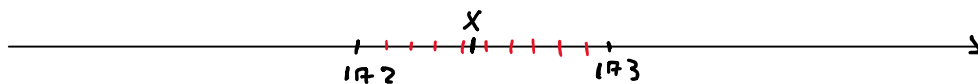
Si può dimostrare che questa scrittura ha senso anche quando ci sono infinite

cifre decimali.

$$a_n \dots a_1 a_0, d_1 d_2 \dots = \sum_{n=0}^m a_n \cdot 10^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot \frac{1}{10^n}}.$$

Il significato di questa
somma infinita verrà
chiarito nei corsi di
Analisi.

- Verificare ogni numero reale (non negativo) se può rappresentare con un allineamento decimale per approssimazioni successive.



$$x = 172,4 \dots$$

Attenzione: la rappresentazione di un numero potrebbe non essere unica. Ad esempio $0,9 = 1$. Questo problema si evita escludendo gli allineamenti che terminano con infiniti 9.

Domande:

Come si fa l'allineamento decimale di un numero razionale?

$$\bullet \frac{9}{50} = ?$$

L'all. si ricava tramite la **DIVISIONE DECIMALE**

$$\begin{array}{r} 9 \\ 0 \\ \hline 90 \\ 50 \\ \hline 400 \\ 400 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{9}{50} = 0,18 \quad (\text{allineamento finito})$$

$$\bullet \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 0 \\ \hline 90 \\ 9 \\ \hline 90 \\ 9 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\frac{1}{3} = 0,333333\dots \quad \text{si scrive } 0,\overline{3}.$$

$$\bullet \frac{40}{33}$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ 33 \\ \hline 70 \\ 66 \\ \hline 40 \\ 33 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$\frac{40}{33} = 1,\overline{21}$$

• È possibile che le cifre che si ripetano non siano le prime dopo la virgola:

$$\frac{337}{330} = 1,0\overline{21}$$

In generale, dati $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, ogni passo della divisione decimale è una divisione intera con al più b possibili valori del resto. Quindi dopo un numero finito di passi si ottiene o un resto

nullo o un resto già precedentemente ottenuto.
 Nel primo caso si ottiene un ell. finito,
 nel secondo un ell. periodico.

TEOREMA

La divisione decimale associa ad ogni numero razionale (non negativo) un ell. decimale che può essere soltanto:

- finito
- **PERIODICO SEMPLICE**, cioè del tipo:

$$a_n \dots a_1 a_0, \overline{p_1 \dots p_s}$$

- **PERIODICO MISTO**, cioè del tipo

$$\underbrace{a_n \dots a_1 a_0}_{\text{PARTE INTERA}}, \underbrace{d_1 \dots d_M}_{\text{ANTIPIEDODO}} \overbrace{p_1 p_2 \dots p_s}^{\text{PERIODO}}$$

PARTE INTERA

ANTIPIEDODO PERIODO

PROPOSIZIONE

Siano $n, s \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$ e $a_0, \dots, a_n, p_1, \dots, p_s \in S$.

Allora:

$$\bullet \ 0, \overline{p_1 \dots p_s} = \frac{p_1 \dots p_s}{\underbrace{99 \dots 9}_{(s \text{ volte})}} = \frac{p_1 \dots p_s}{10^s - 1} \in \mathbb{Q}.$$

$$\bullet \ a_n \dots a_1 a_0, \overline{p_1 \dots p_s} = \frac{a_n \dots a_1 a_0 p_1 \dots p_s - a_n \dots a_1 a_0}{10^s - 1}$$

DIM

$$\bullet \ \text{Sia } x = 0, \overline{p_1 \dots p_s}$$

$$x \cdot 10^s = p_1 \dots p_s, \overline{p_1 \dots p_s} = p_1 \dots p_s + x$$

$$x \cdot 10^s = p_1 \dots p_s + x$$

$$x \cdot (10^s - 1) = p_1 \dots p_s$$

$$x = \frac{p_1 \dots p_s}{10^s - 1}$$

$$\bullet \text{ Sia } x = a_n \dots a_1 a_0, \overline{p_1 \dots p_s}$$

$$= a_n \dots a_1 a_0 + \frac{p_1 \dots p_s}{10^s - 1}$$

$$= \frac{a_n \dots a_1 a_0 \cdot (10^s - 1) + p_1 \dots p_s}{10^s - 1}$$

$$= \frac{a_n \dots a_1 a_0 \overset{s \text{ volte}}{00 \dots 0} - a_n \dots a_1 a_0 + p_1 \dots p_s}{10^s - 1}$$

$$= \frac{a_n \dots a_1 a_0 p_1 \dots p_s - a_n \dots a_1 00}{10^s - 1}$$

ESEMPI

$$0, \overline{28} = \frac{28}{99}$$

$$1, \overline{28} = \frac{128 - 1}{99}$$

$$10, \overline{102} = \frac{10102 - 10}{999}$$

$$0, \overline{9} = \frac{9}{9} = 1.$$

PROPOSIZIONE 2

Siano $m \in \mathbb{N}$, $s, M \in \mathbb{N}$, $s, M \geq 1$ e $a_0, \dots, a_n$, $d_1, \dots, d_M$, $p_1 \dots p_s \in S$. Allora:

$$a_n \dots a_0, d_1 \dots d_M \overline{p_1 \dots p_s} =$$

$$= \frac{a_n \dots a_0 d_1 \dots d_M p_1 \dots p_s - a_n \dots a_0 d_1 \dots d_M}{10^s - 1}$$

$$\underbrace{99 \dots 9}_{s \text{ volte}} \underbrace{0 \dots 0}_{M \text{ volte}} \rightarrow (10^s - 1) \cdot 10^M$$

DIM

$$\text{Sia } x = a_n \dots a_0, d_1 \dots d_n \overline{p_1 \dots p_s}$$

$$x \cdot 10^M = a_n \dots a_0 d_1 \dots d_n, \overline{p_1 \dots p_s}$$

$$= \frac{a_n \dots a_0 d_1 \dots d_n p_1 \dots p_s - a_n \dots a_0 d_1 \dots d_n}{10^s - 1}$$

Dividendo per 10^M si ottiene la formula

$$\cdot 0, \overline{1712} = \frac{412 - 17}{990} = \frac{395}{990}$$

$$\cdot 2, \overline{125} = \frac{2125 - 212}{900}$$

I numeri razionali sono tutti e soli i numeri che ammettono una rappresentazione decimale finita o periodica (semplice o mista).

$$0, \overline{9} = \frac{9}{9} = 1$$

E i numeri irrazionali? Hanno sviluppi decimali infiniti e non periodici.

$$1,01001000100001000001 \dots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

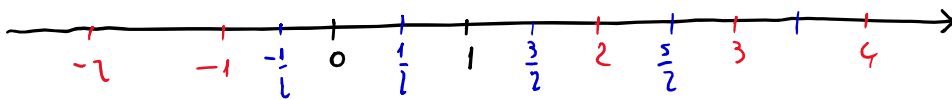
$$\sqrt{2} = 1,4142 \dots$$

$$\pi = 3,141592 \dots$$

$$e = 2,7182 \dots$$

Ultime considerazioni su $\mathbb{R}$.

I numeri reali si possono rappresentare su un retto (retta reale).



Def: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che I è un INTERVALLO se $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$x, y \in I \wedge x < z < y \Rightarrow z \in I.$$

Si può dimostrare che gli intervalli sono dei seguenti tipi:

- 1) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ con $a \leq b$.
- 2) $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ con $a < b$
e (a, b)
- 3) $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ con $a < b$
- 4) $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ con $a < b$
- 5) $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
- 6) $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
- 7) $] -\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
- 8) $] -\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
- 9) $\mathbb{R} =] -\infty, +\infty[$
- 10) $\emptyset$.

POTENZE MONOMI E POLINOMI

Def: Sia $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e sia $n \in \mathbb{N}$. Definiamo

$$x^n = \begin{cases} x \cdot x \cdot \dots \cdot x & (n \text{ volte}) \quad \text{se } n \geq 1. \\ 1 & \text{se } n = 0. \end{cases}$$

Definiamo inoltre $x^{-n} := \frac{1}{x^n}$.

Se $n \geq 1$, possiamo anche definire $0^n = 0$.

Attenzione

- 0^0 non è definito
- 0^{-n} non definito per $n \in \mathbb{N}$.

Per definire le potenze con esponente in $\mathbb{Q}$ utilizziamo le radici.

TEOREMA Siano $y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

- 1) Se n è dispari, $\exists!$ $x \in \mathbb{R}$ t.c. $x^n = y$.
- 2) Se n è pari e $y \geq 0$, allora $\exists!$ $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ t.c. $x^n = y$.
- 3) Se n è pari e $y < 0$, $\nexists$ $x \in \mathbb{R}$ t.c. $x^n = y$.

Def. Nei casi 1) e 2) l'unico x definito dal precedente teorema è detto **RADICE n -ESIMA** di y e si indica $\sqrt[n]{y}$.

$n=2$ $\sqrt[2]{y} = \sqrt{y}$ radice quadrata

$n=3$ $\sqrt[3]{y}$ radice cubica

$n=4$ $\sqrt[4]{y}$ radice quarta

$\vdots$

$\sqrt[n]{y}$ radice n -esima

RICORDARE

n dispari: $\sqrt[n]{y}$ è sempre definita

$\sqrt[n]{y}$ ha sempre lo stesso segno di y

$$x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$$

n pari: $\sqrt[n]{y}$ è definita solo se $y \geq 0$.

$\sqrt[n]{y}$ è sempre ≥ 0 .

$$x^n = y \Leftrightarrow x^n = y \wedge y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt[n]{y} \wedge y \geq 0.$$

$$\sqrt[4]{81} = 3$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2$$

~~$$\sqrt[4]{16}$$~~

$$\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = 2$$

oss

Siano $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, allora:

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x & \text{se } n \text{ è dispari} \\ |x| & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

Def: Sia $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Sia $q \in \mathbb{Q}$, $q = \frac{n}{m}$ con $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Allora definiamo

$$x^q := \sqrt[m]{x^n}$$

• Se $n > 0$, definiamo $0^q = 0$.

Attenzione: Se $x < 0$ e $q \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ la nostra convenzione è che x^q non è ben definito.

$$(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1$$

$$(-1)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1$$

$$\sqrt[5]{-7} = -\sqrt[5]{7} = -7^{\frac{1}{5}}$$

$$\sqrt[5]{-7} \neq (-7)^{\frac{1}{5}}$$

E se l'esponente è irrazionale?

2^π ?

Si può definire per approssimazione.

PROPRIETÀ

1) Se $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ e siano $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

$$\bullet x^{\alpha_1 + \alpha_2} = x^{\alpha_1} \cdot x^{\alpha_2}$$

$$\bullet x^{\alpha_1 - \alpha_2} = x^{\alpha_1} / x^{\alpha_2}$$

$$\bullet (x^{\alpha_1})^{\alpha_2} = x^{\alpha_1 \alpha_2} \quad (\text{da non confondere con } x^{\alpha_1^{\alpha_2}})$$

$$\bullet x^{-\alpha_1} = \frac{1}{x^{\alpha_1}}$$

2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$$

3) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 : x^0 = 1.$

ESEMPLI

$$\cdot \frac{(3^2 \cdot 5^3)^5}{5^{14}} = \frac{(3^2)^5 \cdot (5^3)^5}{5^{14}} = \frac{3^{10} \cdot 5^{15}}{5^{14}} = \frac{3^{10}}{5^2} = \frac{3^{10}}{25}$$

$$\cdot \text{la metà di } 2^{20} \text{ è } \frac{2^{20}}{2} = 2^{19}.$$

$$\begin{aligned} \cdot 2^8 \cdot 6^{-4} \cdot 3^2 &= 2^8 \cdot 2^{-4} \cdot 3^{-4} \cdot 3^2 \\ &= 2^4 \cdot 3^{-2} = \frac{2^4}{3^2} = \frac{16}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \frac{4}{\sqrt[3]{2}} &= \frac{2^2}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{2-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 2^3} \\ &= \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{2^3} = 2\sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

$$\cdot 4\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{4^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{192}$$

oss $\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0$ e $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$:

$$\cdot \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$$

$$\cdot \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

Attenzione: In generale:

$$\sqrt[n]{x+y} \neq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$$

$$(x+y)^n \neq x^n + y^n$$

POTENZE DI UN BINOMIO.

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

I coefficienti si determinano con il TRIANGOLO DI TARTAGLIA.

		1			$(x+y)^0 = 1$
	1		1		$(x+y)^1 = x + y$
	1	2	1		$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
1	3	3	1		$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
1	4	6	4	1	$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

FORMULA DEL BINOMIO DI NEWTON

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ e $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} y^k$$

$$\text{dove } n! = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n & \text{se } n \geq 1 \\ 1 & \text{se } n = 0. \end{cases}$$

QUADRATO DI UN TRINOMIO

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$$

QUADRATO DI UNA SOMMA DI n TERMINI

$$\begin{aligned}(x_1 + \dots + x_n)^2 &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \\ &\quad + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \dots + 2x_1x_n \\ &\quad + 2x_2x_3 + \dots + 2x_2x_n \\ &\quad \vdots \\ &\quad + 2x_{n-1}x_n\end{aligned}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i < j} x_i x_j$$

Def: Un **MONOMIO** (reale) è un'espressione ottenuta moltiplicando un numero reale per una o più potenze di variabili con esponente naturale.

$$2 \times y$$

$$-4 \times y z$$

$$8 \times x_1 x_2 x_3$$

$$7 = 7x^0$$

$$\pi \times y$$

~~$$2 \times \frac{1}{2} y$$~~

~~$$2 \times y + z$$~~

Def: Un **POLINOMIO** a coefficienti reali è un'espressione che contiene un monomio o la somma di più monomi.

$$5 \times y z + w^4$$

I polinomi si possono sommare, moltiplicare tra loro utilizzando le proprietà distributiva

Alcune formule utili:

- $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$
- $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$
- $x^4 - y^4 = (x-y)(x+y)(x^2 + y^2)$
 $= (x-y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$

• $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y) \sum_{k=0}^n x^{n-k} y^k$$

Polinomi di una variabile

Un polinomio di una variabile si può sempre scrivere nella forma

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad \text{con } n \in \mathbb{N} \\ \text{e } a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Se $a_n \neq 0$, si dice che n è il **grado** del polinomio
(si indica con $\deg P$)

$$x^2 + x - 1 \quad \text{grado 2}$$

$$x + x^3 - x^2 \quad \text{grado 3}$$

$$x + \cancel{x^3} - \cancel{x^2} \quad \text{grado 1}$$

oss $p(x) = 0$ si dice **POLINOMIO NULLO**. È l'unico polinomio il cui grado non è definito.

oss Se $p_1(x)$ e $p_2(x)$ sono polinomi non nulli, allora
 $\deg(p_1 p_2) = \deg p_1 + \deg p_2$

Notazione: l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di variabile x è denoto con $\mathbb{R}[x]$

Def: Siano $a, b \in \mathbb{R}[x]$. Si dice che $b(x)$ **DIVIDE** $a(x)$ in $\mathbb{R}[x]$ se $\exists q \in \mathbb{R}[x]$ tale che $a(x) = b(x) q(x)$.

(si dice anche che $a(x)$ è multiplo di $b(x)$ in $\mathbb{R}[x]$ o che $b(x)$ è un divisore di $a(x)$ in $\mathbb{R}[x]$)

• $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$
quindi $x - 2 \mid x^2 - 4$ ($x - 2$ divide $x^2 - 4$)
 $x + 2 \mid x^2 - 4$

• $x(x^7 - 5x + 3) = x^8 - 5x^2 + 3x$
quindi $x \mid x^8 - 5x^2 + 3x$
e $x^7 - 5x + 3 \mid x^8 - 5x^2 + 3x$

TEOREMA (DI DIVISIONE EUCLIDEA IN $\mathbb{R}[x]$)

Siano $a, b \in \mathbb{R}[x]$, $b \neq 0$. Allora $\exists!$ $r, q \in \mathbb{R}[x]$ tali che:

- 1) $a(x) = b(x) q(x) + r(x)$
- 2) $r(x) = 0$ o $\deg r < \deg b$.

ESEMPI

$$a(x) = 5x^3 + x - 3$$

$$b(x) = x^2 + x + 1$$

$$\begin{array}{r|l}
 \textcircled{5x^3} + 0 \cdot x^2 + x - 3 & \textcircled{x^2} + x + 1 \\
 \hline
 5x^3 + 5x^2 + 5x & \underline{5x - 5} \\
 \hline
 \ll \quad \underline{-5x^2} - 4x - 3 & q(x) \\
 \quad \underline{-5x^2 - 5x - 5} & \\
 \hline
 \quad \quad \ll \quad \underline{x + 2} & \\
 \quad \quad \quad n(x) - &
 \end{array}$$

$$q(x) = 5x - 5$$

$$n(x) = x + 2.$$

oss Il procedimento descritto funziona se $\deg a \geq \deg b$.
Se invece $\deg a < \deg b$, la divisione è elementare:

$$a(x) = 0 \cdot b(x) + a(x) \Rightarrow q(x) = 0 \text{ e } r(x) = a(x)$$

oss

$b(x) \mid a(x) \Leftrightarrow$ il resto della divisione di $a(x)$ per $b(x)$ è 0.

CASO SEMPLICE (DIVISIONE PER $x - 2$)

Se $b(x) = x - 2$ con $d \in \mathbb{R}$. Allora la divisione per $b(x)$ si può fare tramite la **REGOLA DI RUFFINI**.

$$a(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$b(x) = x - \textcircled{2} \quad 2 = 2$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 3 & 0 & -4 \\
 2 & \downarrow & + & & \\
 & 1 & 5 & 10 & 16 \\
 \hline
 & \underbrace{1 \quad 5 \quad 10}_{\text{coefficienti di } q(x)} & & & 16 \text{ r.}
 \end{array}$$

$$q(x) = x^2 + 5x + 10$$

$$r(x) = 16.$$

TEOREMA DEL RESTO

Sia $p \in \mathbb{R}[X]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora il resto della divisione di $p(x)$ per $x - \alpha$ è uguale a $p(\alpha)$

valore ottenuto sostituendo α al posto di x

$$p(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$q(x) = x - 2$$

$$p(2) = 8 + 3 \cdot 4 - 4 = 16.$$

TEOREMA DI RUFFINI

Sia $p \in \mathbb{R}[x]$ e se $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora $p(x)$ è divisibile per $x - \alpha \iff p(\alpha) = 0$.

Def: I numeri reali $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $p(\alpha) = 0$ si dicono **RADICI** del polinomio

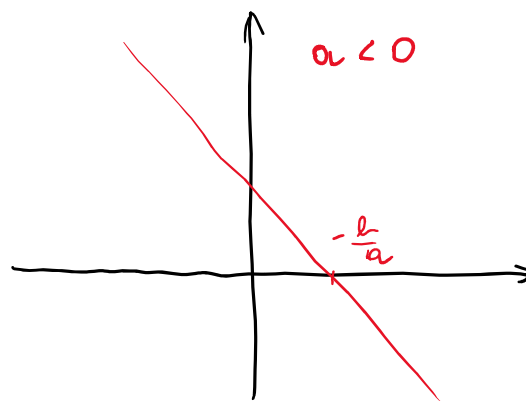
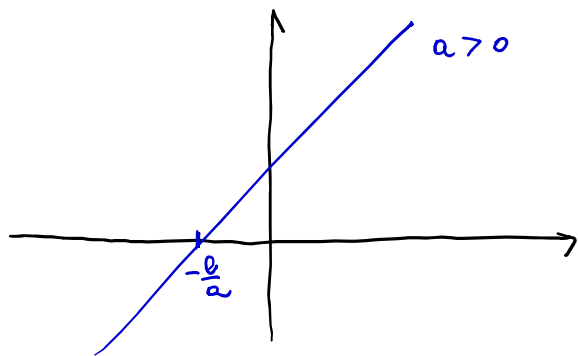
Come si trovano le radici di un polinomio?

1) Se $\deg p = 1$.

Allora $p(x) = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

$$ax + b = 0 \iff ax = -b \iff x = -\frac{b}{a}.$$

Unica radice è $-\frac{b}{a}$.



2) deg $p(x) = 2$

$$p(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Si definisce $\Delta := b^2 - 4ac$

Se $\Delta > 0$: due radici $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Se $\Delta = 0$: una radice $x = -\frac{b}{2a}$

Se $\Delta < 0$: non ci sono radici (reali).

D/M

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) \end{aligned}$$

quindi

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

• Se $\Delta \geq 0$:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Se $\Delta < 0$ $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2} < 0$ impossibile.

RICONFANNE

1) $ax^2 + bx + c = a \left((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}$

Vertice della parabola $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$.

2) $\Delta = 0$. $p(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$

Se $a > 0$: $p(x) = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2$

Se $a < 0$: $p(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$
 $= -|a|(x + \frac{b}{2a})^2$
 $= -(\sqrt{|a|}x + \frac{b\sqrt{|a|}}{2a})^2$

3) Se $\Delta < 0$. $p(x)$ ha sempre lo stesso segno di a (o di c)

4) $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}}{a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - ac}}{a}$

5) Possibili grafici delle parabole associate a $p(x)$:

