

I numeri reali sono un insieme in cui:

- Sono fissati due elementi $0, 1 \in \mathbb{R}$ con $0 \neq 1$
- sono definite due operazioni $+$ e $\cdot$.
- Esiste una relazione di ordinamento $(\leq)$.
- Valgono le seguenti proprietà:

1) L'operazione $+$ soddisfa:

- 1.1) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: a + (b + c) = (a + b) + c$ (PROP. ASSOCIATIVA)
- 1.2) $\forall a, b \in \mathbb{R}: a + b = b + a$ (PROP. COMMUTATIVA)
- 1.3) $\forall a \in \mathbb{R}: a + 0 = a$ (0 È L'ELEMENTO NEUTRO PER $+$)
- 1.4) $\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R}: a + b = 0$. ($\exists$ L'OPPOSTO DI OGNI ELEMENTO)

2) L'operazione $\cdot$ soddisfa:

- 2.1) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (PROP. ASSOCIATIVA DI $\cdot$)
- 2.2) $\forall a, b \in \mathbb{R}: a \cdot b = b \cdot a$ (PROP. COMMUTATIVA DI $\cdot$)
- 2.3) $\forall a \in \mathbb{R}: a \cdot 1 = a$ (1 È ELEMENTO NEUTRO DI $\cdot$)
- 2.4) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists b \in \mathbb{R}: a \cdot b = 1$. (ESISTENZA DEL RECIPROCO)
- 2.5) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ (PROP. DISTRIBUTIVA)

3) La relazione $\leq$ soddisfa:

- 3.1) $\forall a \in \mathbb{R}: a \leq a$ (PROP. RIFLESSIVA)
- 3.2) $\forall a, b \in \mathbb{R}: a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$ (PROP. ANTISIMMETRICA)
- 3.3) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (PROP. TRANSITIVA)
- 3.4) $\forall a, b \in \mathbb{R}: a \leq b \vee b \leq a$. (PROP. TOTALE)
- 3.5) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ (COMPATIBILITÀ DI $\leq$ CON $+$)
- 3.6) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: a \leq b \wedge 0 \leq c \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$ (COMPATIBILITÀ DI $\leq$ CON $\cdot$)

4) Siano A, B due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ tali che:
 $\forall a \in A, b \in B: a \leq b$. Allora $\exists c \in \mathbb{R} \text{ t.c.}$
 $\forall a \in A, b \in B: a \leq c \wedge c \leq b$.

MOLTIPLICAZIONE PER 0:

$$\forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 0 = 0.$$

DIM

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= a \cdot (0 + 0) && (\text{perché } 0+0=0) \\ &= a \cdot 0 + a \cdot 0 && (\text{prop. distributiva}) \end{aligned}$$

$$a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$$

$$\begin{aligned} a \cdot 0 + 0 &= a \cdot 0 + a \cdot 0 && (\text{legge di cancellazione}) \\ 0 &= a \cdot 0. \end{aligned}$$

legge di annullamento del prodotto:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = 0 \iff a = 0 \vee b = 0.$$

Notazione Dati due numeri $a, b \in \mathbb{R}$, scriviamo

$$a \geq b \quad \text{se} \quad b \leq a$$

$$a < b \quad \text{se} \quad a \leq b \wedge a \neq b$$

$$a > b \quad \text{se} \quad a \geq b \wedge a \neq b.$$

oss: Siano $a, b \in \mathbb{R}$, allora:

$$\neg (a \leq b) \iff a > b$$

$$\neg (a \geq b) \iff a < b$$

$$\neg (a > b) \iff a \leq b$$

$$\neg (a < b) \iff a \geq b.$$

Def (VALORE ASSOLUTO)

Sia $a \in \mathbb{R}$, si definisce VALORE ASSOLUTO DI a la quantità:

$$|a| := \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

$$|-10| = 10$$

$$|2| = 2$$

$$|0| = 0$$

$$|-\pi| = \pi.$$

Numeri naturali:

Def: Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ si dice **INDUTTIVO** se

- 1) $0 \in A$.
- 2) $\forall a \in A: a + 1 \in A$.

Def: Definiamo insieme dei **NUMERI NATURALI** il più piccolo sottoinsieme induttivo di $\mathbb{R}$, cioè l'intersezione di tutti i sottoinsiemi induttivi di $\mathbb{R}$ (lo indichiamo con $\mathbb{N}$).

$$0 \in \mathbb{N}$$

$$1 \in \mathbb{N}$$

$$2 := 1 + 1 \in \mathbb{N}$$

$$3 := 2 + 1$$

$$4 := 3 + 1$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

oss Possiamo considerare la funzione $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $a \mapsto a+1$.

Si può dimostrare che $(\mathbb{N}, 0, s)$ soddisfa gli assiomi di Peano.

Def. Un numero naturale $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ si dice un **NUMERO PRIMO** se: $\forall a, b \in \mathbb{N}$ con $m = ab$ si ha $a = 1 \vee b = 1$.

Numeri primi:

2 3 5 7 11 13 17 19

TEOREMA (TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ARITMETICA)

Ogni numero naturale $n \geq 2$ o è primo o si può scrivere come prodotto di numeri primi.

Più precisamente $\exists k \in \mathbb{N}, k \geq 1, p_1, \dots, p_k \in \mathbb{N}$ numeri primi distinti e $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tali che:

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k} \quad (\text{FATTORIZZAZIONE IN PRIMI DI } n).$$

Questa scrittura è unica (a meno dell'ordine).

$$24 = 3 \cdot 8 = 3 \cdot 2^3$$

$$1000 = 10^3 = (2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3$$

$$156 = 3 \cdot 52 = 3 \cdot 2^2 \cdot 13$$

Numeri interi:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

Def: Sia $n \in \mathbb{Z}, n \notin \{-1, 0, 1\}$, si dice che n è **PRIMO** se $|n|$ è primo.

Def: Siano $a, b \in \mathbb{Z}$. Si dice che b **DIVIDE** a se $\exists q \in \mathbb{Z}$ tale che $a = b \cdot q$.

(si dice anche che a è **MULTIPLO** di b o che b è un **DIVISORE** di a).

Notazione: si scrive

$b \mid a$ per indicare che b divide a

$b \nmid a$ per indicare che b non divide a

ESEMPI

$$10 \mid 80$$

$$(80 = 10 \cdot 8)$$

$$25 \mid 125$$

$$\begin{matrix} 11 \\ 9 \end{matrix}$$

$$7 \mid 56$$

$$-5 \mid 20$$

$$3 \nmid 20$$

$$5 \mid 0$$

$$142 \mid 0$$

$$(20 = (-5) \cdot (-4))$$

$$(0 = 5 \cdot 0)$$

oss

Tutti i numeri sono divisori di 0.

0 è divisore solo di se stesso.

oss $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, allora: $b \mid a \Leftrightarrow |b| \mid |a|$

Quindi il concetto di divisibilità si può sempre ricondurre ai numeri naturali.

Def: Un numero intero $n \in \mathbb{Z}$ si dice **PARI** se è multiplo di 2 ($2 \mid n$). Altrimenti si dice **DISPARI**.

TEOREMA (DI DIVISIONE EUCLIDEA / CON RESTO).

Siano $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Allora $\exists! q, r \in \mathbb{Z}$ tali che:

$$1) a = b \cdot q + r$$

$$2) 0 \leq r < |b|.$$

ESEMPLI

$$1) a = 20$$

$$b = 3$$

$$q = 6, r = 2$$

$$20 = 3 \cdot 6 + 2$$

$$2) a = 100$$

$$b = 7$$

$$100 = 7 \cdot 14 + 2$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ 7 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ \hline 14 \\ \hline 9 \end{array}$$

(2)_r

$$3) \ a = 100$$

$$b = -7$$

$$100 = 7 \cdot 14 + 2$$

$$= (-7) \cdot (-14) + 2$$

$$q = -14$$

$$r = 2$$

$$4) \ a = -100$$

$$b = 7$$

$$100 = 7 \cdot 14 + 2$$

$$-100 = -7 \cdot 14 - 2$$

$$= -7 \cdot 14 - 7 + 7 - 2$$

$$= 7 \cdot (-15) + 5$$

$$q = -15$$

$$r = 5$$

$$5) \ a = 21$$

$$b = 50$$

$$q = 0, \ r = 21$$

$$21 = 0 \cdot 50 + 21$$

oss

Sia $a \in \mathbb{Z}$ allora:

1) a è pari $\Leftrightarrow$ il resto della divisione di a per 2 è 0

$$\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } a = 2q.$$

2) a è dispari $\Leftrightarrow$ il resto della div. per 2 è 1

$$\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } a = 2q + 1.$$

3) a è pari $\Leftrightarrow a^2$ è pari.

$$\Leftrightarrow a^2 \text{ è multiplo di } 4.$$

4) a è dispari $\Leftrightarrow a^2$ è dispari.

Domanda: Quanti sono i divisori di un numero intero?

- $m = 0$ tutti i numeri sono divisori di 0.
- $m = 1$ solo ± 1
- $m = 2$ solo ± 1 e ± 2
- $m = 3$ solo ± 1 e ± 3
- $m = 4 = 2^2$

$$\begin{array}{ccc} \pm 1 & \pm 2 & \pm 4 \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ 2^0 & 2^1 & 2^2 \end{array}$$
- $m = 20 = 5 \cdot 2^2$

$$\begin{array}{ll} \pm 5^0 \cdot 2^0 = \pm 1 & \pm 5^1 \cdot 2^0 = \pm 5 \\ \pm 5^0 \cdot 2^1 = \pm 2 & \pm 5^1 \cdot 2^1 = \pm 10 \\ \pm 5^0 \cdot 2^2 = \pm 4 & \pm 5^1 \cdot 2^2 = \pm 20 \end{array}$$

I divisori si ottengono facendo variare gli esponenti dei fattori primi tra zero e l'esponente con cui compaiono nella fattorizzazione di m .

Il numero di divisori dipende solo dagli esponenti che compaiono nella fattorizzazione:

$$20 = 5^1 \cdot 2^2$$

$$(1+1) \cdot (2+1) = 6 \text{ modi per scegliere gli esponenti}$$

Ci sono 6 divisori positivi di 20

12 divisori interi di 20 (contando due possibilità di segno)

Regola generale ($m \geq 2$):

In generale se $m = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n}$ è la fattorizzazione in primi distinti di m , allora ci sono

$(a_1+1) \cdot (a_2+1) \cdot \dots \cdot (a_n+1)$ divisori positivi di m
e $2(a_1+1) \cdot (a_2+1) \cdot \dots \cdot (a_n+1)$ divisori interi di m

$$n = 50 = 5 \cdot 10 = 2 \cdot 5^2$$

Ci sono 6 divisori positivi e 12 divisori interi.

$$n = 520 = 13 \cdot 4 \cdot 10 = 13 \cdot 5 \cdot 2^3$$

ci sono $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ divisori positivi

e 32 divisori interi di 520.

Def: Siano $a, b \in \mathbb{Z}$ non entrambi nulli. Si definisce **MASSIMO COMUN DIVISORE** tra a e b ($\text{MCD}(a, b)$) il più grande numero intero che divide sia a che b .

Def. Siano $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Si definisce **MINIMO COMUNE MULTIPLO** tra a e b ($\text{mcm}(a, b)$) il più piccolo numero intero positivo che è multiplo sia di a che di b .

ESEMPIO

$$a = 1000 = 10^3 = 2^3 \cdot 5^3$$

$$b = 48 = 2 \cdot 24 = 3 \cdot 2^4$$

$$\text{MCD}(a, b) = 2^3 = 8$$

$$\text{mcm}(a, b) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 = 6000$$

ESEMPIO 2

$$a = 6000 = 6 \cdot 10^3 = 2 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3$$

$$b = 580 = 290 \cdot 2 = 145 \cdot 2^2 = 29 \cdot 2^2 \cdot 5$$

$$\text{MCD}(a, b) = 2^2 \cdot 5 = 20$$

$$\text{m.c.m.}(a, b) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 29 = 6000 \cdot 29 = 174000$$

M.C.D. e m.c.m. si possono calcolare a partire dalle scomposizioni di $|a|$ e $|b|$ in fattori primi.

M.C.D. (a, b) si ottiene come prodotto di
dei primi comuni
presi con l'esponente minore
con cui compaiono.

m.c.m. (a, b) si ottiene come prodotto di
tutti i fattori primi presi con
l'esponente maggiore.

Se $|a|$ e $|b|$ non hanno fattori primi comuni, allora

$$\text{M.C.D.}(a, b) = 1 \quad \text{e} \quad \text{m.c.m.}(a, b) = |a \cdot b|$$

I numeri interi si possono usare come indici nei simboli di sommatoria e produttoria.

Notazione: Siano $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ e $f: \{k \in \mathbb{Z} \mid m_1 \leq k \leq m_2\} \rightarrow \mathbb{R}$.

Consideriamo i numeri $f(m_1), f(m_1+1), \dots, f(m_2)$.

• La somma di questi numeri si denota con:

$$\sum_{k=m_1}^{m_2} f(k) = f(m_1) + f(m_1+1) + f(m_1+2) + \dots + f(m_2)$$

• Il prodotto degli stessi numeri si denota con

$$\prod_{k=m_1}^{m_2} f(k) = f(m_1) \cdot f(m_1+1) \cdot \dots \cdot f(m_2)$$

ESEMPI

$$\sum_{n=1}^3 n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14.$$

$$\sum_{n=-3}^1 n = -3 - 2 - 1 + 0 + 1 = -5$$

$$\prod_{n=1}^3 \frac{1}{n} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\sum_{n=1}^3 \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

~~$$\sum_{n=-2}^1 \frac{1}{n}$$~~

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k.$$

Curiosità

$$\sum_{n=1}^m n = \frac{m(m+1)}{2}$$

Nota

$$\sum_{n=m_1}^{m_2} f(n) = \sum_{j=m_1}^{m_2} f(j) = \sum_{n=m_1}^{m_2} f(n) = \sum_{i=m_1}^{m_2} f(i)$$

l'indice n può essere indicato con qualsiasi altra lettera (che non sia già utilizzata per indicare quantità specifiche).

$$\sum_{n=1}^m f(n) = \sum_{j=1}^m f(j)$$

qui non si può usare n come indice perché n indica l'indice finale.

Numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{101}{202} = \frac{-10}{-20}$$

Una frazione si dice **ridotta ai minimi termini** se $\text{mcd}(a, b) = 1$. Esiste un unico modo di scrivere un numero razionale come frazione $\frac{a}{b}$ con $\text{mcd}(a, b) = 1$ e $b > 0$.

In base alle regole con cui si sommano / moltiplicano le frazioni, è facile vedere che $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$:

- $q_1 + q_2 \in \mathbb{Q}$
- $q_1 - q_2 \in \mathbb{Q}$
- $q_1 \cdot q_2 \in \mathbb{Q}$
- Se $q_2 \neq 0$, $\frac{q_1}{q_2} \in \mathbb{Q}$.

Quindi in $\mathbb{Q}$ possiamo fare tutte le operazioni fondamentali. Però non sempre ci posso calcolare le radici quadrate.

TEOREMA $\nexists q \in \mathbb{Q}$ t.c. $q^2 = 2$.

TEOREMA 2 $\exists! x \in \mathbb{R}, x > 0$ tale che $x^2 = 2$. Tale x si indica con $\sqrt{2}$.

Dai due teoremi segue che $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

TEOREMA 3 (TEOREMA DI ESISTENZA DELLE RADICI QUADRATE)

$\forall y \in \mathbb{R}, y \geq 0 \exists! x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ ($x > 0$ se $y > 0$)
tale che $x^2 = y$. Tale x si indica con $\sqrt{y}$.

Sia $y \in \mathbb{R}, y \geq 0$. Allora:

- $\sqrt{y}$ unico numero ≥ 0 il cui quadrato è y

- $x^2 = y$

$$x^2 - y = 0$$

$$x^2 - (\sqrt{y})^2 = 0$$

$$(x + \sqrt{y})(x - \sqrt{y}) = 0$$

$$x + \sqrt{y} = 0 \quad \vee \quad x - \sqrt{y} = 0$$

$$x = -\sqrt{y} \quad \vee \quad x = \sqrt{y}$$

Le soluzioni di $x^2 = y$ sono $\pm \sqrt{y}$

oss Sia $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$:

$\sqrt[m]{n}$ è razionale $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ t.c. $n = m^2$.

$\Leftrightarrow$ nella fattorizzazione in primi di n compaiono solo esponenti pari.

- Se $q = \frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{N}, b > 0$ e $\text{mcd}(a, b) = 1$

Allora:

$\sqrt{q} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{N}$ t.c. $a = m^2$ $b = n^2$.

- $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

- $\sqrt{42} \notin \mathbb{Q}$

- $\sqrt{\frac{50}{8}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} \in \mathbb{Q}$

- $\sqrt{\frac{3}{2}} \notin \mathbb{Q}$

- $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ è razionale? **NO**

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$x^2 = 2 + 3 + 2\sqrt{6}$$

$$\frac{x^2 - 5}{2} = \sqrt{6}$$

$$\sqrt{6} = \frac{x^2 - 5}{2}$$

Se x fosse razionale, anche $\sqrt{6}$ sarebbe razionale ma questo è falso perché 6 non è un quadrato.

Attenzione: Non è detto che somme e prodotto di numeri irrazionali siano irrazionali.

$$\bullet \quad 1 - \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \quad \text{ma} \quad 1 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 1 \in \mathbb{Q}.$$

$$\bullet \quad \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}.$$

$$\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{1 + 3 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} = 1 + \sqrt{3}$$

$$\text{e } \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$$

$$\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 2 \in \mathbb{Q}.$$

Formule per il radicale doppio.

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a, b \geq 0, \quad \text{con } a^2 - b \geq 0.$ Allora:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Se $a^2 - b$ è un quadrato, questa formula semplifica il radicale doppio:

$$\begin{aligned} \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} &= \sqrt{4 + \sqrt{12}} \\ &= \sqrt{\frac{4 + 2}{2}} + \sqrt{\frac{4 - 2}{2}} \\ &= \sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 4 & b &= 12 \\ a^2 - b &= 16 - 12 = 4 \end{aligned}$$

Altri esempi di numeri irrazionali:

π

rapporto tra la lunghezza di una circ.
e il suo diametro.

e

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad k! = \begin{cases} 1 & \text{se } k=0 \\ \prod_{j=1}^k j & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$