

Prof. Gabriele Mancini

Email: gabriele.mancini@uniba.it

Pagina web: <https://www.dm.uniba.it/it/members/mancini>

Ufficio: secondo piano, stanza 30

Ricevimento: lunedì 14:30 - 16:30 (controllare avvisi sulla pagina web), oppure su appuntamento via email, oppure... quando volete potete sempre bussare alla mia porta!

Pagina web del Precorso di Matematica:

<https://www.dm.uniba.it/it/didattica/precorsi/a-a-2026-27/precorso-di-matematica>

Test finale: 21 settembre, ore 9:30

iscrizione obbligatoria tramite la pagina del precorso **entro il 18 settembre, alle 18:00**

Modifica al calendario del precorso

- La lezione del 10 settembre è spostata al 18 settembre.
- Il 17 settembre faremo lezione dalle 9:00 alle 13:00
- Il 18 settembre faremo lezione dalle 9:00 alle 12:00

Prossime lezioni:

9 sett : 9:00 - 13:00

11 sett : 9:00 - 12:00

14 sett : 9:00 - 12:00

15 sett : 9:00 - 13:00

16 sett : 9:00 - 13:00

17 sett : 9:00 - 13:00

18 sett : 9:00 - 12:00

iNδAM

Istituto Nazionale di Alta Matematica



L'INDAM

bandisce per l'Anno Accademico 2026/2027

15 BORSE DI STUDIO

per studenti che si iscrivono al primo anno di laurea
della classe L-35 **“Scienze Matematiche”**
nell'a.a. 2026/2027.



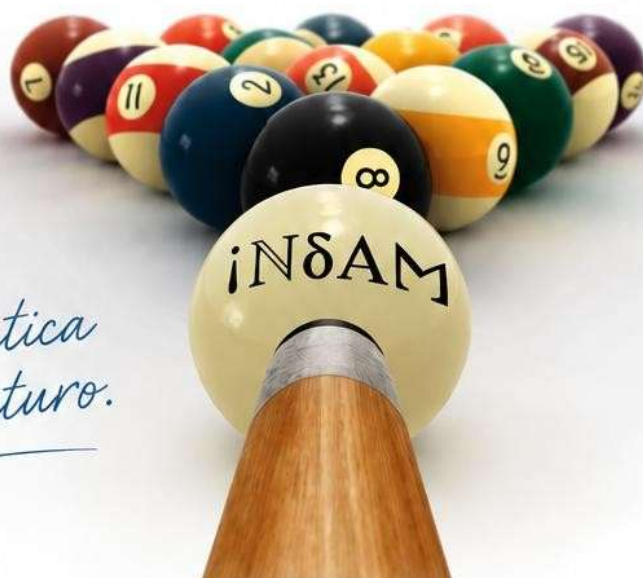
Il bando è scaricabile dal sito internet
www.altamatematica.it



La scadenza per la presentazione delle domande è il
09/09/2026 ore 16:00.



La prova scritta si terrà il
16 settembre 2026 alle ore 14:30.



*La matematica
apre il futuro.*

Insiemi numerici

- NUMERI NATURALI

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- NUMERI INTERI (RELATIVI)

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

- NUMERI RAZIONALI

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid \underbrace{a, b \in \mathbb{Z}}_{\text{tali che}}, b \neq 0 \right\}$$

- NUMERI REALI

$$\mathbb{R} = \left\{ \pm m, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots \mid m \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \dots \in \{0, 1, \dots, 9\} \right\}$$

- NUMERI IRRAZIONALI

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$$

- NUMERI COMPLESSI

$$\mathbb{C} = \{a + i b \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

Problema: queste non sono definizioni, sono solamente elenchi di simboli!

È possibile indicare i numeri naturali anche in modi differenti:

0	1	2	3	4	5	6
—					.	.
	I	II	III	IV	.	.
	—	—	≡	□	.	.

Per dare una definizione rigorosa degli insiemi numerici occorre determinarne le proprietà caratteristiche che sono vere indipendentemente dai simboli utilizzati per rappresentarli.

Ci sono due modi per farlo:

- 1) Partire da $\mathbb{N}$: definizione assiomatica di $\mathbb{N}$
(approccio storico, tramite gli ASSIOMI DI PEANO)
- 2) Partire da $\mathbb{R}$: definizione assiomatica di $\mathbb{R}$
(approccio moderno).

Per provare a definire i numeri naturali possiamo dire che:

I numeri naturali sono i numeri che usiamo per contare.

Per contare abbiamo bisogno di:

- un insieme di simboli
- scegliere un simbolo iniziale.
- conoscere il successivo di ogni simbolo in modo tale che:

- 1) contando i simboli non si ripetano
- 2) tutti i simboli, tranne quello iniziale, sono il successivo di un altro simbolo
- 3) contando a partire dal simbolo iniziale si ottengono tutti gli altri simboli.

Prima di formalizzare rigorosamente questo concetto, abbiamo bisogno di richiamare alcuni concetti astratti e ricordare il significato di alcuni simboli.

Insiemistica

Def Un **INSIEME** è una qualsiasi collezione di oggetti per la quale è ben definita una legge di appartenenza. Gli oggetti che compongono un insieme si dicono **ELEMENTI** dell'insieme.

- $\in$ appartiene ($a \in A$
l'elemento a appartiene all'insieme A)

- $\notin$ non appartiene.

- $\subseteq$ (su alcuni libri, indicato con $\subset$)

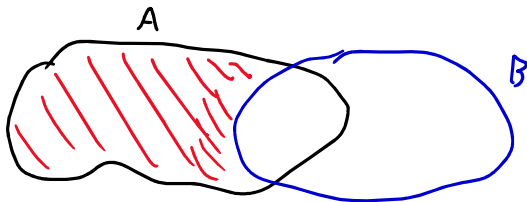
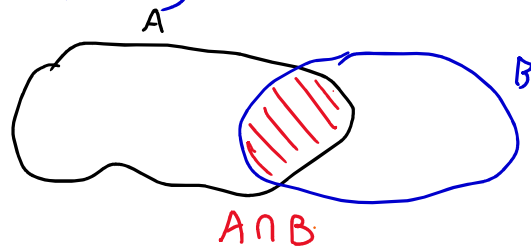
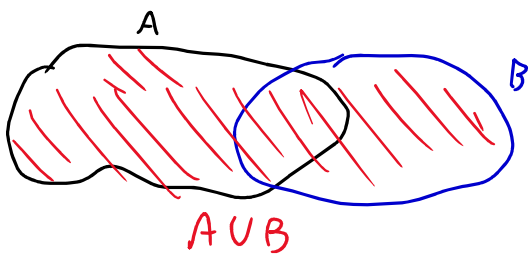
$A \subseteq B$ significa: $\forall a \in A: a \in B$.
($a \in A \Rightarrow a \in B$)

si legge: A è contenuto in B
 A è un sottoinsieme di B
 B contiene A .

- $\emptyset$ insieme vuoto.

Dati due insiemi A e B definiamo:

- $A \cup B := \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$ UNIONE TRA A E B
- $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$ INTERSEZIONE TRA A E B
- $A \setminus B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$ DIFFERENZA TRA A E B



- $A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$. PRODOTTO CARTESIANO DI A E B .

Funzioni

Def: Una **FUNZIONE** è una terna (A, B, f) dove A e B sono due insiemi non vuoti e f è una legge che associa ad ogni elemento di A un elemento di B (uno solo).

Dato $a \in A$, l'elemento di B che corrisponde ad a tramite f si indica con $f(a)$ (e si dice **IMMAGINE** DI a TRAMITE f o **VALORE** DI f IN a).

Nota: le funzioni si indicano con $f: A \rightarrow B$
 $x \mapsto f(x)$

ESEMPIO

$A = \{ \text{Bari, Borletta, Roma, Milano} \}$

$B = \{ a, e, i, o, u \}$

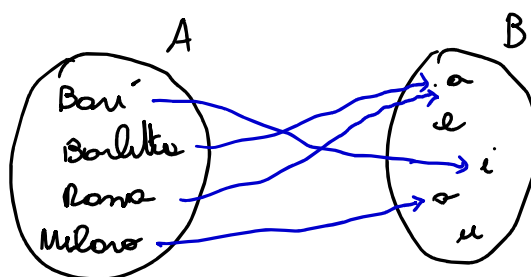
$f: A \rightarrow B$
 $x \mapsto \text{vocale finale di } x$

$f(\text{Bari}) = i$

$f(\text{Borletta}) = e$

$f(\text{Roma}) = a$

$f(\text{Milano}) = o$



Def Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione.

- L'insieme A è detto **DOMINIO** della funzione
- L'insieme B è detto **CODOMINIO** della funzione
- L'insieme

$$f(A) := \{ f(a) \mid a \in A \}$$

è detto **IMMAGINE DI A TRAMITE f**.

Nell'esempio precedente

$$f(A) = \{ a, i, o \}.$$

Def: Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione. Si dice che f è **BIETTIVA** o **BIGETTIVA** se
 $\forall y \in B \exists! x \in A \text{ t.c. } f(x) = y.$

ESEMPIO

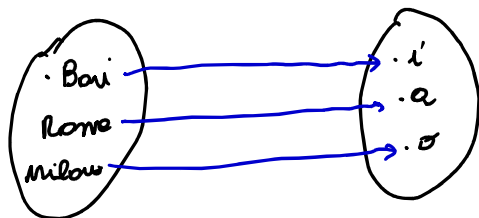
$$A = \{ \text{Bari, Roma, Milano} \}$$

$$B = \{ a, i, o \}$$

$$f: A \rightarrow B$$

$x \mapsto \text{Vocale finale di } x.$

Nota: questo non è la stessa funzione di prima perché il dominio è diverso.



è una funzione
biettiva.

Def: Sia A un insieme non vuoto. Si definisce
OPERAZIONE BINARIA IN A una funzione di
dominio $A \times A$ e codominio A .

$$f: A \times A \rightarrow A$$

$$(x, y) \mapsto \underline{f(x, y)}$$

OPERANDI
RISULTATO.

Le operazioni si indicano anche con simboli
particolari come $+$, $-$, $*$, $\square$, $\heartsuit$, Δ , ...

In tal caso, si scrive $x * y$ invece di $f(x, y)$.

$$\text{cioè } *: A \times A \rightarrow A$$

$$(x, y) \mapsto x * y.$$

Def: Se $f: A \rightarrow B$ è una funzione, si
definisce **GRAFICO** di f , l'insieme:

$$\mathcal{G}(f) := \{ (x, f(x)) \mid x \in A \}$$

$$= \{ (x, y) \in A \times B \mid y = f(x) \}$$

oss $\mathcal{G}(f)$ è un sottoinsieme di $A \times B$.

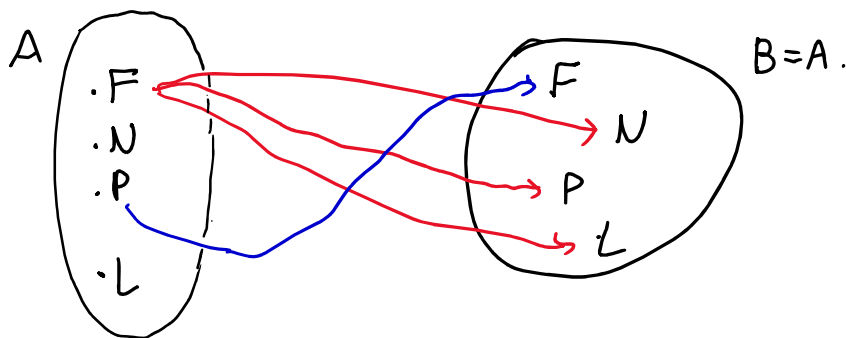
Def. Una **RELAZIONE** è una terna (A, B, R) dove A e B sono due insiemi e R è un qualsiasi sottoinsieme di $A \times B$.

ESEMPIO

$A = \{ \text{Francesco, Nicolò, Paolo, Lucia} \}$

$B = A$.

$R = \{ (\text{Francesco, Paolo}), (\text{Paolo, Francesco}), (\text{Francesco, Lucia}), (\text{Francesco, Nicolò}) \}$.



(A, B, R) è una relazione.

oss Se $f: A \rightarrow B$ è una funzione, $f(f)$ definisce una relazione. Più precisamente $(A, B, f(f))$ è una relazione.

Approfondimento: Una relazione (A, B, R) si dice una **RELAZIONE FUNZIONALE** se $\forall a \in A$
 $\exists! b \in B$ t.c. $(a, b) \in R$. In tal caso si può definire la funzione

$f_a: A \rightarrow B$
 $a \rightarrow \text{unico } b \text{ t.c. } (a, b) \in R,$
 Questa funzione soddisfa $g(f_a) = R.$

ESEMPI DI RELAZIONI

- Relazione di uguaglianza in un insieme A .

$$B = A$$

$$R = \{ (a, a) \mid a \in A \}.$$

- $A = B$

$$R = \{ (a, b) \mid a \neq b, a \in A, b \in B \}.$$

Le relazioni spesso si indicano con dei simboli:
 $\sim, \rho, \leq \dots$

Se $r = (A, B, R)$ è una relazione, si scrive
 $x \sim y$ invece di $(x, y) \in R$.

Definizione assiomatica di $\mathbb{N}$ (ASSIOMI DI DEANO).

Il sistema dei numeri naturali è una terna
 $(\mathbb{N}, \bar{n}, s)$ dove:

- $\mathbb{N}$ è un insieme.
- $\bar{n}$ è un elemento di $\mathbb{N}$.
- $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ che soddisfa le seguenti proprietà:
 - 1) $\forall m, m \in \mathbb{N}: m \neq \bar{n} \Rightarrow s(m) \neq s(\bar{n}).$

$$2) s(N) = N \setminus \{\bar{m}\}$$

3) PRINCIPIO DI INDUZIONE

$\forall A \subseteq N$ si ha che:

$$\bar{m} \in A \wedge s(A) \subseteq A \Rightarrow A = N.$$

Nel linguaggio comune

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\bar{m} = 0$$

$$s(0) = 1, \quad s(1) = 2, \quad s(2) = 3, \quad \dots$$

TEOREMA Se $(A, \bar{m}, s)$ e $(B, \bar{m}, \sigma)$ sono due terne che soddisfano gli assiomi di Peano allora $\exists$ una funzione $f: A \rightarrow B$ biettiva tale che

$$1) f(\bar{m}) = \bar{m}$$

$$2) \forall m \in A: f(s(m)) = \sigma(f(m)).$$

A partire dagli assiomi di Peano si possono costruire tutti gli altri insiemi numerici.

2° approccio agli insiemi numerici

Un approccio più moderno consiste nel dare una definizione assiomatica di $\mathbb{R}$.

I numeri reali sono un sistema $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, \leq)$
dove:

$\mathbb{R}$ è un insieme.

$0, 1$ sono elementi distinti di $\mathbb{R}$ ($1 \neq 0$).

$+$ e $\cdot$ sono operazioni in $\mathbb{R}$

$\leq$ è una relazione in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

definite in modo tale che valgano le seguenti proprietà:

1) Proprietà di $+$:

$$1.1) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a+b)+c = a+(b+c)$$

$$1.2) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : a+b = b+a.$$

$$1.3) \quad \forall a \in \mathbb{R} : a+0 = a.$$

$$1.4) \quad \forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a+b=0.$$

2) Proprietà di $\cdot$:

$$2.1) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$2.2) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a$$

$$2.3) \quad \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a$$

$$2.4) \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists b \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \cdot b = 1.$$

$$2.5) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c).$$

3) Proprietà di $\leq$:

$$3.1) \quad \forall a \in \mathbb{R} : a \leq a. \quad (\text{PROP. REFLESSIVA})$$

$$3.2) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a=b. \\ (\text{PROP. ANTISIMMETRICA})$$

$$3.3) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c. \\ (\text{PROP. TRANSITIVA})$$

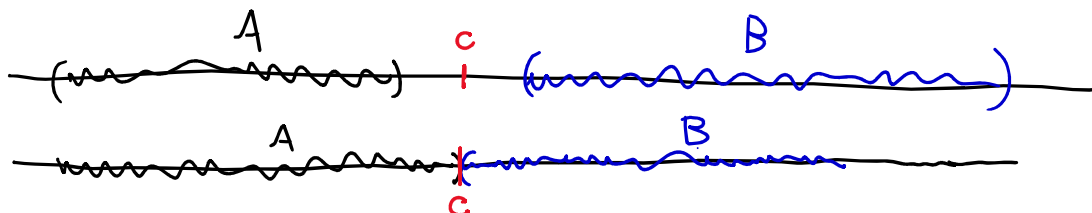
$$3.4) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \vee b \leq a.$$

$$3.5) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c.$$

$$3.6) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \wedge c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc.$$

4) ASSIOMA DI COMPLETEZZA / ASSIOMA DI DEDEKIND.

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, due insiemi non vuoti
 tali che $\forall a \in A, b \in B : a \leq b$. Allora
 $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che $\forall a \in A : a \leq c$
 $\wedge \forall b \in B : c \leq b$



OSS

- 1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ questo numero si indica anche con $a+b+c$.
- 2) $a \cdot b \cdot c$ è uguale sia a $(a \cdot b) \cdot c$ che a $a \cdot (b \cdot c)$.
- 3) $a \cdot b$ spesso si indica con ab .
- 4) 1.4 dice che $\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a+b=0$.
 Si può dimostrare che b è unico.

PROPOSIZIONE (UNICITA' DELL' OPPOSTO)

$\forall a \in \mathbb{R} \exists! b \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a+b=0$.

DIM

Supponiamo che $\exists b_1, b_2 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a+b_1=0$
 $a+b_2=0$.

$$\begin{aligned}
 b_1 &= b_1 + 0 && (\text{per 1.3}) \\
 &= b_1 + (a + b_2) && (\text{perché } a + b_2 = 0) \\
 &= (b_1 + a) + b_2 && (\text{per 1.1}) \\
 &= (a + b_1) + b_2 && (\text{per 1.2}) \\
 &= 0 + b_2 && (\text{perché } a + b_1 = 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= b_2 + 0 && \text{(per 1.2)} \\
 &= b_2 && \text{(per 1.3)}
 \end{aligned}$$

quindi $b_1 = b_2$ ■

Def: Dato $a \in \mathbb{R}$, l'unico numero reale $b \in \mathbb{R}$ t.c. $a + b = 0$ si dice **OPPOSTO** di a e si indica con $-a$.

5) Si può dimostrare anche che $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists! b \in \mathbb{R}, b \neq 0$, t.c. $a \cdot b = 1$. Tale b si dice **RECIPROCO** di a e si indica con $\frac{1}{a}$.

Def: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, definiamo

$$a - b := a + (-b). \quad (\text{DIFFERENZA TRA } a \text{ E } b)$$

$$\text{e, se } b \neq 0, \frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b}. \quad (\text{RAPPORTO o QUOZIENTE TRA } a \text{ E } b)$$

LEGGI DI CANCELLAZIONE / PRINCIPI DI EQUIVALENZA.

$$1) \forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a + c = b + c \Leftrightarrow a = b$$

$$2) \forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a + c = b \Leftrightarrow a = b - c.$$

$$3) \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ con } c \neq 0: \quad ac = bc \Leftrightarrow a = b.$$

$$4) \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ con } c \neq 0: \quad ac = b \Leftrightarrow a = \frac{b}{c}.$$

OSS (SULLE FRAZIONI)

$$1) \frac{1}{1} = 1$$

$$2) \forall a \in \mathbb{R}: \quad \frac{a}{1} = a.$$

$$3) \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \quad \frac{a}{a} = 1.$$

$$4) \forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

$$5) \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, b, d \neq 0 : \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$6) \forall a, b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0 : \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Attenzione

$$1) \frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \quad (\text{MAI scrivere l'uguale})$$

$$2) \frac{a}{\frac{b}{c}} \neq \frac{\frac{a}{b}}{c} \quad \text{Infatti:}$$

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \cdot \frac{1}{\frac{b}{c}} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

Evitare la scrittura $\frac{\frac{a}{b}}{c}$ che può facilmente causare errori.