

Radici (reali) di polinomi in una variabile

Sia $p \in \mathbb{R}[X]$ un polinomio di grado $n \geq 3$.
Come si trovano le radici di $p(x)$?

ESEMPIO

$$p(x) = 3x^3 - 13x^2 - 8x + 4$$

Notiamo che $\frac{1}{3}$ è una radice di $p(x)$, infatti:

$$\begin{aligned} p\left(\frac{1}{3}\right) &= 3 \cdot \frac{1}{27} - 13 \cdot \frac{1}{9} - \frac{8}{3} + 4 \\ &= -\frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 4 = 0. \end{aligned}$$

Questo vuol dire che possiamo dividere $p(x)$ per $x - \frac{1}{3}$, ricavando il quoziente tramite la Regola di Ruffini.

3	-13	- 8	4
$\frac{1}{3}$	1	-4	-4
3	-12	-12	0

$$\begin{aligned} p(x) &= \left(x - \frac{1}{3}\right) (3x^2 - 12x - 12) \\ &= 3 \left(x - \frac{1}{3}\right) (x^2 - 4x - 4). \end{aligned}$$

Per la legge di annullamento del prodotto

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x^2 - 4x - 4 = 0.$$

Sia $p_1(x) = x^2 - 4x - 4$

Le radici di $p_1(x)$ sono:

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{8} = 2 \pm 2\sqrt{2}.$$

Radici di $p(x)$:

$$x = \frac{1}{3} \quad \vee \quad x = 2 + 2\sqrt{2} \quad \vee \quad x = 2 - 2\sqrt{2}.$$

Nota: Si può scrivere;

• le radici di $p(x)$ sono $\frac{1}{3}, 2 \pm 2\sqrt{2}$.

• $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = 2 + 2\sqrt{2} \vee x = 2 - 2\sqrt{2}$.

Si noti invece che:

$$p(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{3} \wedge x \neq 2 + 2\sqrt{2} \wedge x \neq 2 - 2\sqrt{2}$$

Domanda: Nell'esempio precedente, come abbiamo trovato la radice $\frac{1}{3}$?

TEOREMA: Sia $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ e $a_n \neq 0$. Se $q \in \mathbb{Q}$ è una radice di $p(x)$, allora $\exists a, b \in \mathbb{Z}$ t.c. $q = \frac{a}{b}$ con $b \neq 0$ e $a \mid a_0$ e $b \mid a_n$.

$$p(x) = \textcircled{3}x^3 - 13x^2 - 8x + \textcircled{4}$$

$a_n = 3$ $a_0 = 4$

Divisori di a_0 : $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

Divisori di a_n : $\pm 1, \pm 3$.

Le possibili radici razionali vanno cercate tra i numeri $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}$.

ESEMPIO 2

$$p(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1.$$

$p(1) = 0$, quindi 1 è una radice

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & 2 & -2 & -1 \\ \hline & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

$$p(x) = (x-1) \underbrace{(x^3 + 2x^2 - 2x - 1)}_{p_1(x)}.$$

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^3 - 1 + 2x^2 - 2x \\ &= (x-1)(x^2 + x + 1) + 2x(x-1) \\ &= (x-1)(x^2 + x + 1 + 2x) \\ &= (x-1)(x^2 + 3x + 1) \end{aligned}$$

Nota: In alternativa si poteva usare nuovamente Ruffini notando che $p_1(1) = 0$.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & & 1 & 3 & 1 \\ \hline & 1 & 3 & 1 & 0 \end{array} \quad p_1(x) = (x-1)(x^2 + 3x + 1)$$

$$p(x) = (x-1)^2 \underbrace{(x^2 + 3x + 1)}_{\Delta = 9 - 4 = 5 > 0}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Radici di $p(x)$ sono $1, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

oss Sia $p(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0, \Delta \geq 0$. Allora

$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \text{ dove}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-1)^2(x^2 + 3x + 1) \\ &= (x-1)^2 \left(x - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

Def: Sia $p \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$ e sia $\alpha \in \mathbb{R}$ una radice di $p(x)$. Si definisce **MOLTEPLICITÀ (ALGEBRICA)** di α il più grande numero naturale n t.c. $(x - \alpha)^n \mid p(x)$.

ESEMPI

• $p(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1$
 $x=1$ è una radice di molteplicità 2
 $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ sono radici di molteplicità 1
(RADICI SEMPLICI)

• $p(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$

$\Delta > 0$: due radici semplici

$\Delta = 0$: una radice di molteplicità 2.

Def: Sia $p \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ con $\deg p \geq 1$. Si dice che $p(x)$ è **RIDUCIBILE IN $\mathbb{R}[X]$** se $\exists a, b \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ t.c. $p(x) = a(x) \cdot b(x)$ e $0 < \deg a < \deg p$, $0 < \deg b < \deg p$.
 Se p non è riducibile, diremo che p è **IRRIDUCIBILE**.

ESEMPLI

- $p(x) = ax + b$ con $a \neq 0$.
 è sempre irriducibile. Tutti i polinomi di 1° grado sono irriducibili.

- Polinomi di grado 2:

$$p(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{con } a \neq 0.$$

$$p \text{ è irriducibile} \iff \Delta < 0.$$

$$p \text{ è riducibile} \iff \Delta \geq 0.$$

- E se $\deg p \geq 3$? in questo caso si dimostra che p è sempre riducibile.

TEOREMA: Sia $p \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ con $\deg p \geq 3$.

Allora p è riducibile. Inoltre p può essere scritto come prodotto di polinomi irriducibili di grado 1 o 2. Questa scrittura è unica a meno dell'ordine e di fattori moltiplicativi reali.

ESEMPIO

$$\bullet \quad x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) = (3x - 9)\left(\frac{x}{3} + 1\right)$$

$$\bullet \quad 8x^3 - 1 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$$

$\Delta < 0.$

$$\begin{aligned}\bullet \quad x^4 + 1 &= x^4 + 1 + 2x^2 - 2x^2 \\ &= (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 \\ &= (x^2 + 1 - \sqrt{2}x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}x)\end{aligned}$$

Questo polinomio è riducibile ma non ha radici reali.

$$\bullet \quad 2x^6 + 5x^3 - 3$$

Le possibili radici razionali sono $\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}$ e $\pm \frac{3}{2}$. Però si verifica che nessuno di questi numeri è radice di p .

Per trovare eventuali radici reali e fattorizzare il polinomio, possiamo effettuare la **sostituzione** $t = x^3$. Il polinomio si riscrive come:

$$2t^2 + 5t - 3$$

$$\Delta = 25 + 24 = 49 \quad , \quad t_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}2t^2 + 5t - 3 &= 2\left(t - \frac{1}{2}\right)(t + 3) \\ &= 2\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)(x^3 + 3)\end{aligned}$$

$$= 2\left(x - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}x + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)(x + \sqrt[3]{3})(x^2 - \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{9})$$

Si noti che le uniche radici sono $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ e $-\sqrt[3]{3}$.

• $p(x) = x^3 + 3x - 2$

Ha radici razionali?

Le possibili radici razionali sono ± 1 e ± 2 .

Ma $p(\pm 1) \neq 0$ e $p(\pm 2) \neq 0$.

Quindi p non ha radici razionali.

Ha radici reali?

oss: Ogni polinomio di grado dispari ha almeno una radice reale.

p ha grado 3 quindi ha almeno una radice reale (non razionale).

Equazioni / disequazioni (polinomiali).

Sono equazioni / disequazioni in cui l'incognita x compare all'interno di espressioni polinomiali.

Si possono ricondurre a equazioni / disequazioni della forma:

$p(x) = 0$ / $p(x) \leq 0$ / $p(x) \geq 0$ / $p(x) < 0$ / $p(x) > 0$
 dove $p(x)$ è un polinomio.

• Equazioni ($p(x) = 0$)

Risolvere $p(x) = 0$ significa trovare le radici reali di $p(x)$. Si possono applicare i metodi trattati in precedenza.

• Disuguaglianze ($p(x) \geq 0$ / ≤ 0 , > 0 , < 0)

Il metodo dipende dal grado di $p(x)$.

Grado 1: $ax + b \geq 0$ con $a \neq 0$.

$$ax \geq -b$$

Se $a > 0$:

$$x \geq -\frac{b}{a}$$



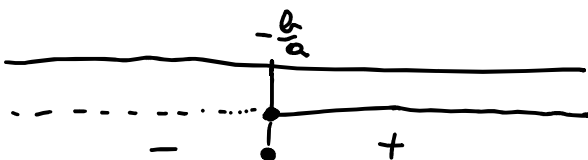
Se $a < 0$:

$$x \leq -\frac{b}{a}$$

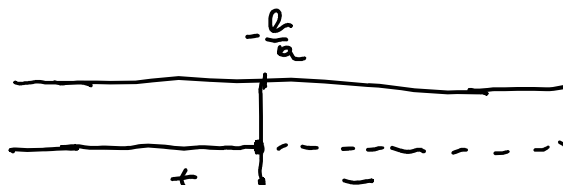


Segno di $ax + b$:

Se $a > 0$:



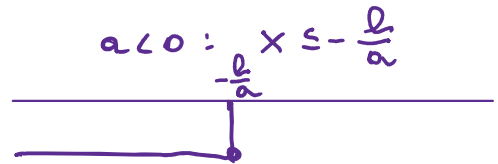
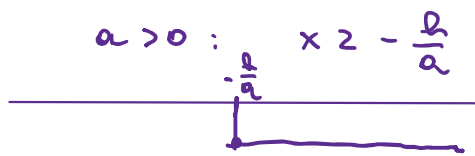
Se $a < 0$:



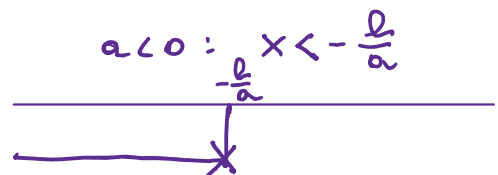
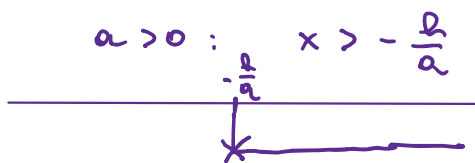
Nota: attenzione a non confondere la rappresentazione delle soluzioni di una disuguaglianza con la rappresentazione

del segno. La rappresentazione delle soluzioni dipende dal verso delle disuguaglianze da risolvere:

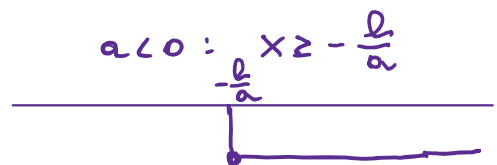
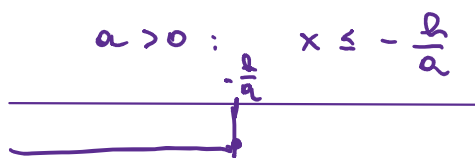
• Soluzioni di $ax + b \geq 0$:



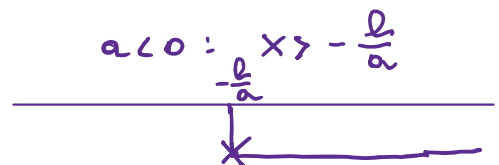
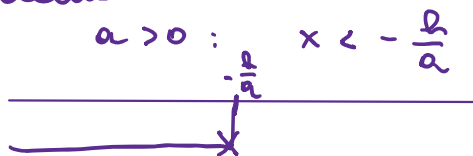
• Soluzioni di $ax + b > 0$:



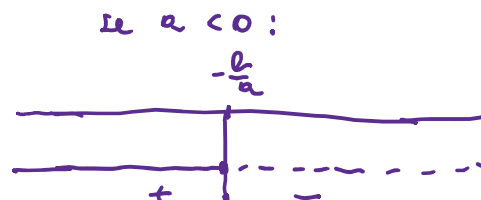
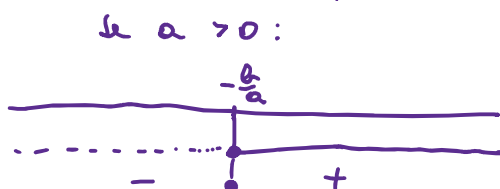
• Soluzioni di $ax + b \leq 0$:



• Soluzioni di $ax + b < 0$:



La rappresentazione del segno di $p(x)$ invece dipende solo dall'espressione di p ed è sempre descritto dai grafici:



grado 2:

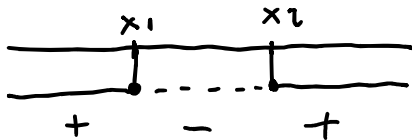
deg $p = 2 \Rightarrow p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Sappiamo che a p è associata una parabola

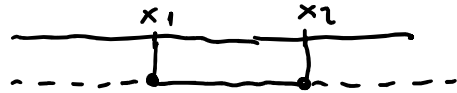
la cui posizione dipende dai segni di a e di $\Delta = b^2 - 4ac$.

Ci sono 6 possibili rappresentazioni del segno di p :

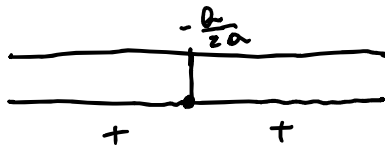
1) $\Delta > 0, a > 0$



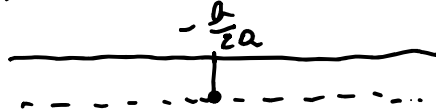
2) $\Delta > 0, a < 0$



3) $\Delta = 0, a > 0$



4) $\Delta = 0, a < 0$



5) $\Delta < 0, a > 0$



6) $\Delta < 0, a < 0$



Partendo da queste rappresentazioni si può risolvere qualsiasi disequazione.

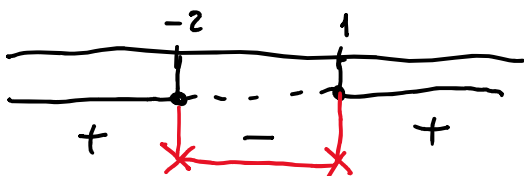
ESEMPI

• $x^2 + x - 2 < 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

Segno del polinomio:



Soluzioni: $-2 < x < 1$

- $x^2 + x + 3 \geq 0$.

$$\Delta = 1 - 12 = -11 < 0.$$

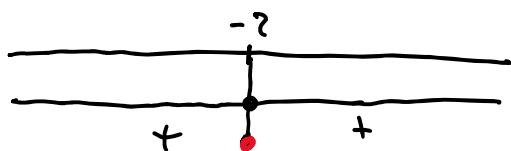
Soluzioni: $x \in \mathbb{R}$.

- $x^2 + x + 3 < 0$

$\nexists$ soluzioni.

- $x^2 + 4x + 4 \leq 0$

$$(x+2)^2 \leq 0$$



Soluzione: $x = -2$.

• grado ≥ 3 :

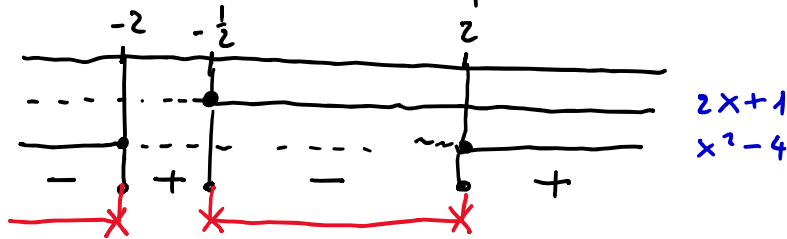
Se $\deg p \geq 3$, per risolvere $p(x) \geq 0 / \leq 0 / > 0 / < 0$:

- 1) Si scrive $p(x)$ come prodotto di polinomi di grado 1 o 2 (non necessariamente irriducibili)
- 2) Si studia il segno dei singoli fattori
- 3) Mettendo insieme le informazioni sui segni si seleziona la regione che corrisponde alle soluzioni.

ESEMPLI

$$\bullet (2x+1)(x^2-4) < 0.$$

Polinomio già fattorizzato:

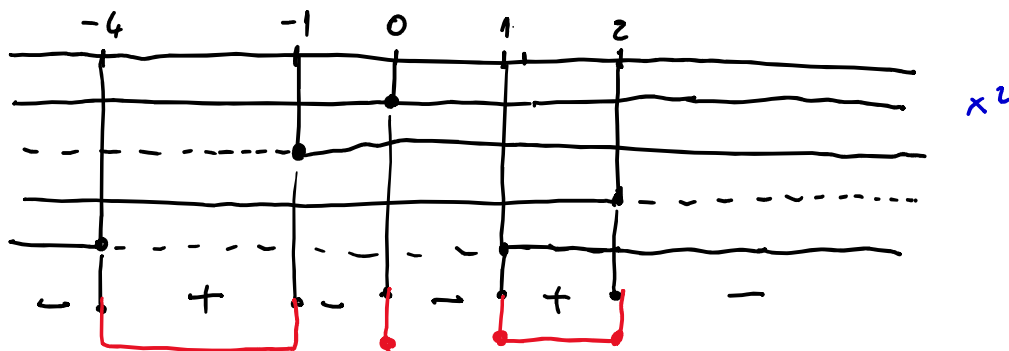


$$x < -2 \quad \vee \quad -\frac{1}{2} < x < 2$$

Insieme delle soluzioni: $]-\infty, -2[\cup]-\frac{1}{2}, 2[$

$$\bullet x^2(x+1)(2-x)(x^2+3x-4) \geq 0$$

$$\hookrightarrow \Delta = 9 + 16 = 25, \quad x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \quad \begin{matrix} 1 \\ -4 \end{matrix}$$



$$-4 \leq x \leq -1 \quad \vee \quad x = 0 \quad \vee \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$[-4, -1] \cup \{0\} \cup [1, 2]$$

$$\bullet x^3 \leq -(x+2)^2$$

$$x^3 \leq -(x^2 + 4x + 4)$$

$$x^3 + x^2 + 4x + 4 \leq 0.$$

$$x^2(x+1) + 4(x+1) \leq 0$$

$$(\cancel{x^2+4})(x+1) \leq 0.$$

$$x+1 \leq 0$$

(si può dividere per x^2+4 perché $x^2+4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$)

$$x \leq -1.$$

Equazioni / disequazioni razionali (frazioni).

L'incognita x compare all'interno di rapporti tra polinomi.

Equazioni:

- 1) Condizioni di esistenza (c.e.): denominatori $\neq 0$.
- 2) Si risolve l'equazione.
- 3) Si verifica se le soluzioni soddisfanno le c.e.

ESEMPIO

$$\frac{x+1}{x^2-x} = \frac{2x}{x-1}$$

$$\begin{aligned} \text{c.e.: } x-1 &\neq 0 \iff x \neq 1 \\ x^2-x &\neq 0 \iff x \neq 1 \wedge x \neq 0. \end{aligned}$$

$$\text{c.e.: } x \neq 1 \wedge x \neq 0.$$

$$\cdot \frac{x+1}{x^2-x} = \frac{2x}{x-1}$$

$x^2-x = (x-1)x$

$$x+1 = 2x \cdot x$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} 1 & \text{X NON ACC.} \\ -\frac{1}{2} & \text{V} \end{cases}$$

Unica soluzione: $x = -\frac{1}{2}$.

ESEMPIO 2

$$\frac{x^4 - x^3 - 2x}{x^2 - x + 1} = 1 - x.$$

• c.e.: $\underbrace{x^2 - x + 1}_{\Delta < 0} \neq 0$ verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.

•
$$\frac{x^4 - x^3 - 2x}{x^2 - x + 1} = 1 - x$$

$$\cancel{x^4} - \cancel{x^3} - \cancel{2x} = \cancel{x^2} - \cancel{x} + 1 - \cancel{x^3} + \cancel{x^2} - \cancel{x}$$

$$x^4 - 2x^2 - 1 = 0.$$

$$t = x^2$$

$$t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$x^2 = 1 + \sqrt{2} \quad \vee$$

$$x = \pm \sqrt{1 + \sqrt{2}}$$

$$x^2 = \underbrace{1 - \sqrt{2}}_{< 0}$$

(impossibile).

Uniche soluzioni: $x = \pm \sqrt{1 + \sqrt{2}}$.

• Disequazioni razionali:

- 1) c.e. (se non vengono effettuati passaggi che semplificano i denominatori modificando la c.e., questo passaggio si può fare insieme al passo 3)

2) Si riconduce la disuguaglianza ad una della forma:

$$\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0 \quad / \quad < 0 \quad / \quad \leq \quad / \quad >$$

3) Si studia il segno di p e q o dei loro fattori (tenendo conto della c.e.).

4) Si seleziona la regione delle soluzioni in base al verso della disuguaglianza da risolvere

ESEMPIO

$$\frac{1}{x^2 - 3} \leq 1.$$

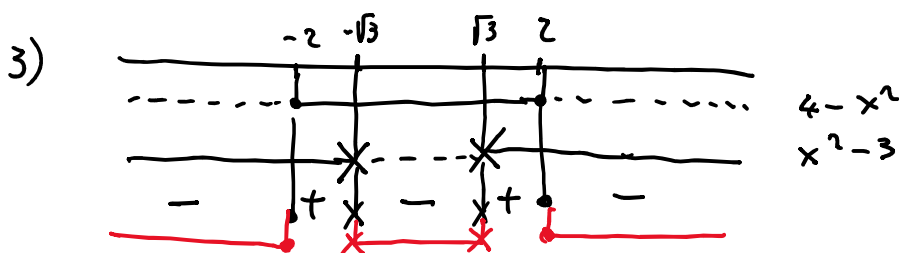
1) c.e. $x^2 - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{3}.$

2) $\frac{1}{x^2 - 3} \leq 1$

$$\frac{1}{x^2 - 3} - 1 \leq 0$$

$$\frac{1 - (x^2 - 3)}{x^2 - 3} \leq 0$$

$$\frac{4 - x^2}{x^2 - 3} \leq 0.$$



4) Soluzioni: $x \leq -2 \vee -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \vee x \geq 2.$