9/9/2025

Logica dei predicati

$A, B, C \quad A(x) \quad B(y,z)$

Un predicato è un'affermazione che contiene un quantificatore.
I quantificatori sono due

- $\exists$ QUANTIFICATORE ESISTENZIALE
  (Si legge "esiste", "esiste almeno un/uno/una"

Per indicare "esiste esattamente uno"
"esiste ed è unico/a"
si usa il simbolo $\exists! \,/\, \exists|$

- $\forall$ QUANTIFICATORE UNIVERSALE
  (Si legge "per ogni", "ogni", "tutti"...)

Esempi: "$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$"

È un enunciato vero

"In ogni triangolo esiste almeno un angolo acuto"

È un enunciato vero

"$\forall x$ triangolo $\exists y$ angolo di x, y acuto"

t.c.

- "$\exists x \in \mathbb{R}$ tale che $x^2 < -2$"

È un enunciato falso.

Le negazioni di enunciati contenenti quantificatori seguono le seguenti regole:

$$\neg\left(\exists x \,(\text{t.c.})\, P(x)\right) \equiv \forall x \, \neg P(x)$$

$$\neg\left(\forall x \; P(x)\right) \equiv \exists x \,(\text{t.c.})\, \neg P(x)$$

Parentesi: Non è fra le regole, ma cosa vuol dire negare $\exists!$?

Dire che "esiste ed è unico" è come dire "$\exists x \wedge x$ è unico"

De Morgan

$$\neg\left(\exists! x \; P(x)\right) \equiv$$

$$\neg\left(\left(\exists x \; P(x)\right) \wedge \left(x \text{ è unico } P(x)\right)\right) \equiv$$

$$\left[\neg\left(\exists x \; P(x)\right)\right] \vee \left[\neg\left(x \text{ è unico } P(x)\right)\right]$$

Esempi:

- "Tutti gli studenti di quest'aula indossano gli occhiali".

La negazione è

"Esiste (almeno) uno studente che NON indossa gli occhiali"

- "Esiste almeno un calciatore che ha segnato in tutte le partite"

"$\exists x$ calciatore t.c. $\forall y$ partita $\underbrace{x \text{ ha segnato in } y}_{P(x,y)}$"

$\neg\{\exists x$ calc. t.c. $\forall y$ partita $P(x,y)\} \equiv$

$\equiv \forall x$ calciatore $\neg\{\forall y$ partita $P(x,y)\} \equiv$

$\equiv \forall x$ calciatore $\exists y$ partita t.c. $\neg P(x,y)$

"Per ogni calciatore c'è (almeno) una partita in cui non ha segnato"

- "Esiste un numero naturale dispari che non è divisibile per 3 e non è divisibile per 5"

"$\exists\, x \in \mathbb{N}$, x dispari tale che
(x non è divis. per 3) $\wedge$ (x non è divis. per 5)"

La sua negazione sarà:

"$\forall\, x \in \mathbb{N}$, x dispari $\neg$[(x non è div. per 3) $\wedge$ (x non è div. per 5)]"

$\equiv$ "$\forall x \in \mathbb{N}$, x disp. (x è div. per 3) $\vee$ (x è div. per 5)"

Teoria ingenua degli insiemi

PARADOSSO DI RUSSEL (Cercheremo di evitarlo)

Come in ogni teoria matematica introduciamo dei termini/concetti PRIMITIVI, di cui, cioè NON daremo la definizione.

Per noi saranno:

- INSIEME ("collezione di oggetti", "raggruppamento di cose che condividono una proprietà comune")
- ELEMENTO ("oggetto che compone o meno un insieme")
- APPARTENENZA ("È membro di" "appartiene a").

In genere un insieme viene descritto in due modi:

per ELENCAZIONE, oppure attraverso una PROPRIETÀ COMUNE che descrive gli elementi.

<u>Esempi</u>:

$A = \{$ primavera, estate, autunno, inverno $\}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$

B: insieme dei numeri interi maggiori di -2 e minori di 3

$B = \{-1, 0, 1, 2\}$

$= \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 3\}$

t.c.

tale che

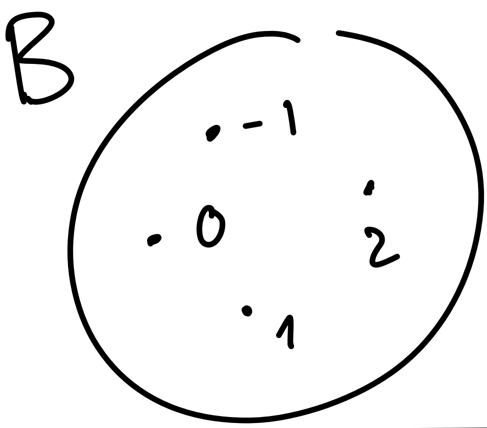
: $\{x \in \mathbb{Z} : -2 < x < 3\}$

Si legge: "l'insieme di tutti gli $x \in \mathbb{Z}$ tali che $-2 < x < 3$"

Parentesi: in generale, per descrivere un insieme mediante una proprietà comune userò questa struttura (grafica)

$$\{\text{DOVE PRENDO GLI ELEMENTI} \mid \text{LA PROPRIETA' CHE DEVONO SODDISFARE}\}$$

Può essere utile usare i diagrammi di Eulero-Venn



Definizione: Dati due insiemi A e B diremo che B è SOTTOINSIEME di A (o che B è INCLUSO/CONTENUTO in A) se ogni elemento di B è anche elemento di A. In tal caso scriveremo $B \subseteq A$.

In simboli: $B \subseteq A$ se

$$\forall x \in B \Rightarrow x \in A$$

PER PIGNOLI

$\forall x$ se $x \in B \Rightarrow x \in A$

- Se $B \subseteq A$ e $A \subseteq B$, allora diremo che $A = B$.

Cioè $A = B \iff (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

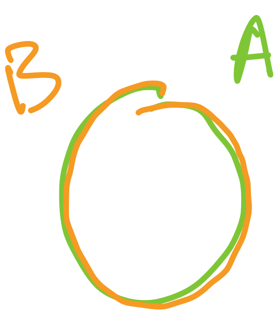
$$\iff (\forall x \text{ se } x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x \text{ se } x \in B \Rightarrow x \in A)$$

- Se $B \subseteq A$ e $B \neq A$, allora B viene detto sottoinsieme PROPRIO di A. A volte si indica con $B \subset A$.

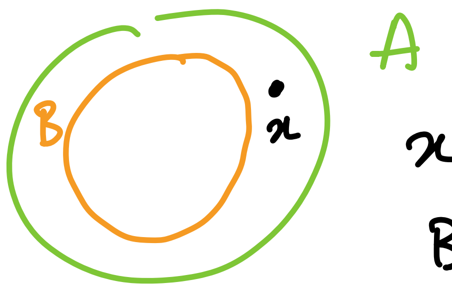
$B \subset A$ se $\forall x \in B \Rightarrow x \in A$

e

$\exists x \in A$ t.c. $x \notin B$



$B \subseteq A$



$x \in A \wedge x \notin B$

$B \subset A$

Esempi: A: "insieme delle stagioni"

$A = \{$primavera, estate, autunno, inverno$\}$

B: "stagioni che iniziano per 'e'"

$B = \{$estate$\}$ $\quad B \subseteq A$

$B \subset A$

$\{$estate$\} \subset A$

NON ha senso scrivere

$\boxed{\text{estate} \subset A}$

Ha senso

estate $\in A$

estate $\in \{$estate$\}$

Un insieme che contiene un solo elemento si dice SINGOLETTO.

Non ha senso $\boxed{\cancel{7 \subset \mathbb{Z}}}$

$\{7\} \subset \mathbb{Z}$ $\quad 7 \in \mathbb{Z}$

Definizione: L'insieme privo di elementi viene detto INSIEME VUOTO $\emptyset$.

Se A è un qualsiasi insieme, allora $\emptyset \subseteq A$. Infatti se $\underbrace{x \in \emptyset}_{\text{FALSO}} \Rightarrow x \in A$

Esempio: $\{x \in \mathbb{N} \mid 2x-1=0\}$

$$2x-1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

Allora NON ci sono numeri naturali che verificano la proprietà $2x-1=0$.
Allora, $\{x \in \mathbb{N} \mid 2x-1=0\} = \emptyset$

$C=\{1,2,3\}$ $\quad x=5$

$x \in \emptyset$ $\quad$ FALSO $\Rightarrow x \in C$

Definizione: Sia A un insieme.
L'insieme di tutti i sottoinsiemi di A viene detto INSIEME DELLE PARTI di A e

si indica con $\mathcal{P}(A)$.

Chiaramente $\boxed{\begin{array}{l}\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A) \\ \emptyset \in \mathcal{P}(A)\end{array}}$ e $A \in \mathcal{P}(A)$

$\{x, y\}$

Esempio: $A = \{x, y\}$

$$\mathcal{P}(A) = \{ \underset{D}{\emptyset}, \underset{E}{\{x\}}, \underset{F}{\{y\}}, \underset{G}{\{x, y\}} \}$$

A

$\{x\} \in \mathcal{P}(A)$ $\quad \boxed{\cancel{x \in \mathcal{P}(A)}}$ NON ha senso

Gli elementi di $\mathcal{P}(A)$ sono D, E, F, G

$\{\{x\}, \{y\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$

$G \in \mathcal{P}(A)$

$A = \{x, y\} \notin \mathcal{P}(A)$

$D \in \mathcal{P}(A)$

$\{A\} = \{\{x, y\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$

$\{G\} \subseteq \mathcal{P}(A)$

Ma $G = \{x, y\}$ $\quad \{x, y\} \in \mathcal{P}(A)$

$\{G\} \subseteq \mathcal{P}(A)$

$\{\{x, y\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$

Osservazione: A meno di così particolari,

- l'ordine in cui si elencano gli elementi di un insieme non conta

$$\{1,2,3\} = \{3,1,2\} = \{3,2,1\} = \dots$$

- Ogni elemento appare (o si indica) una volta sola

$$\{1,1,1,1,2,2,3\} = \{1,2,3\}$$