16/09/2025

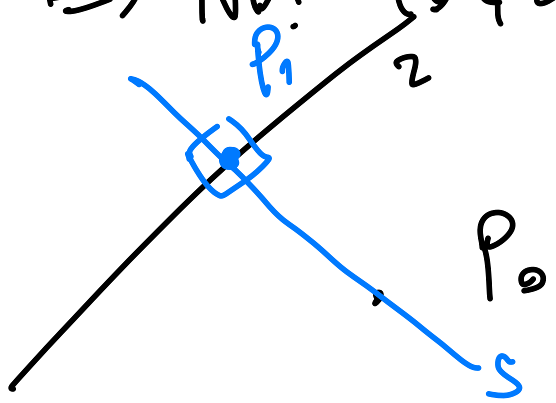
Esercizio:

$r: x - 3y + 2 = 0$

$P_0 = (2,2)$

Mi chiedo se $P_0 \in r$, cioè se le sue coordinate verificano l'equazione che definisce r: $\underbrace{2 - 3 \cdot 2 + 2}_{-2} = 0$?

$\Rightarrow$ NO! $P_0 \notin r \Rightarrow \boxed{d(P_0, r) > 0}$



s retta perpendic. ad r per P_0

$\{P_1\} = r \cap s$

$d(P_0, r) = d(P_0, P_1)$

$r: x - 3y + 2 = 0$

$s: 3x + y + c = 0$

Per ottenere c impongo $P_0 \in s$

$3 \cdot 2 + 2 + c = 0 \Leftrightarrow \boxed{c = -8}$

$$s: 3x + y - 8 = 0$$

$$\{P_1\} = r \cap s : \begin{cases} x - 3y + 2 = 0 \\ 3x + y - 8 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y - 2 \\ — \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y - 2 \\ 9y - 6 + y - 8 = 0 \end{cases} \qquad y = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

$$x = \frac{21}{5} - 2 = \frac{11}{5} \qquad P_1 = \left(\frac{11}{5}, \frac{7}{5}\right)$$

$$d(P_0, r) = d(P_0, P_1) =$$

$$\sqrt{\left(2 - \frac{11}{5}\right)^2 + \left(2 - \frac{7}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{9}{25}}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

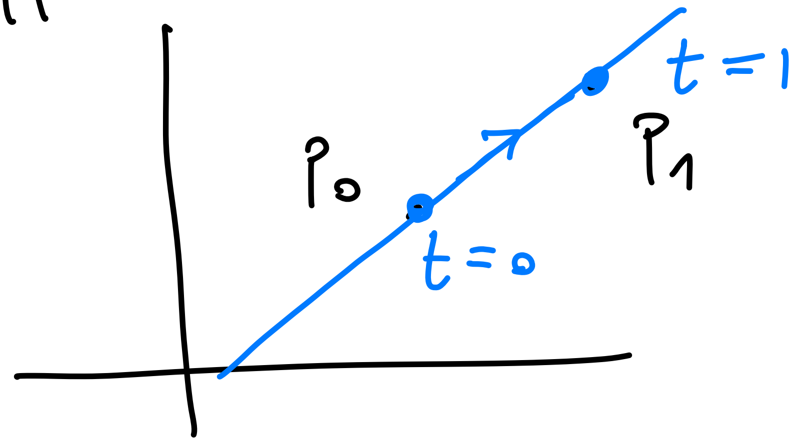
Retta passante per 2 punti

$$(y = mx + q) \qquad \begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

NON entrambi nulli

Se $t=0$ il punto $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$ (x_0, y_0)

appartiene alla retta.



$P_0 = (x_0, y_0)$

$P_1 = (x_1, y_1)$

Voglio scrivere equazioni parametriche della retta che per $t=0$ passa per P_0 e per $t=1$ passa per P_1

$$r: \begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \end{cases}$$

con α e β da determinare

se $\underline{t=1}$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + x_0 \\ y_1 = \beta + y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = x_1 - x_0 \\ \beta = y_1 - y_0 \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = (x_1 - x_0)t + x_0 \\ y = (y_1 - y_0)t + y_0 \end{cases}$$

Per trovare la forma cartesiana devo "risolvere" in t

$$r: \begin{cases} (y_1-y_0)(x-x_0) = (x_1-x_0)\,t\,(y_1-y_0) \\ (x_1-x_0)(y-y_0) = (y_1-y_0)\,t\,(x_1-x_0) \end{cases}$$

$$\iff \quad (x-x_0)(y_1-y_0) = (y-y_0)(x_1-x_0)$$

<u>Esempi</u>: $P_0 = (2,3)$ $\quad P_1 = (-1,4)$

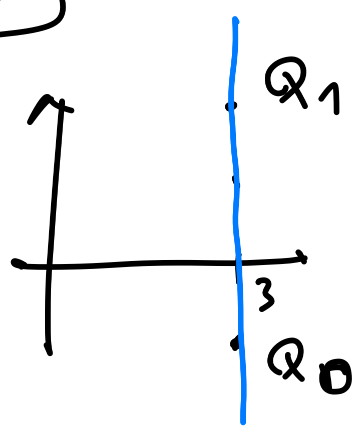
la retta per P_0 e P_1 è data da

$$\begin{cases} x = (2-(-1))\,t - 1 \\ y = (3-4)\,t + 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -t + 4 \end{cases}$$

$$t = -y+4 \implies x = -3y + 12 - 1$$

$$x + 3y - 11 = 0$$

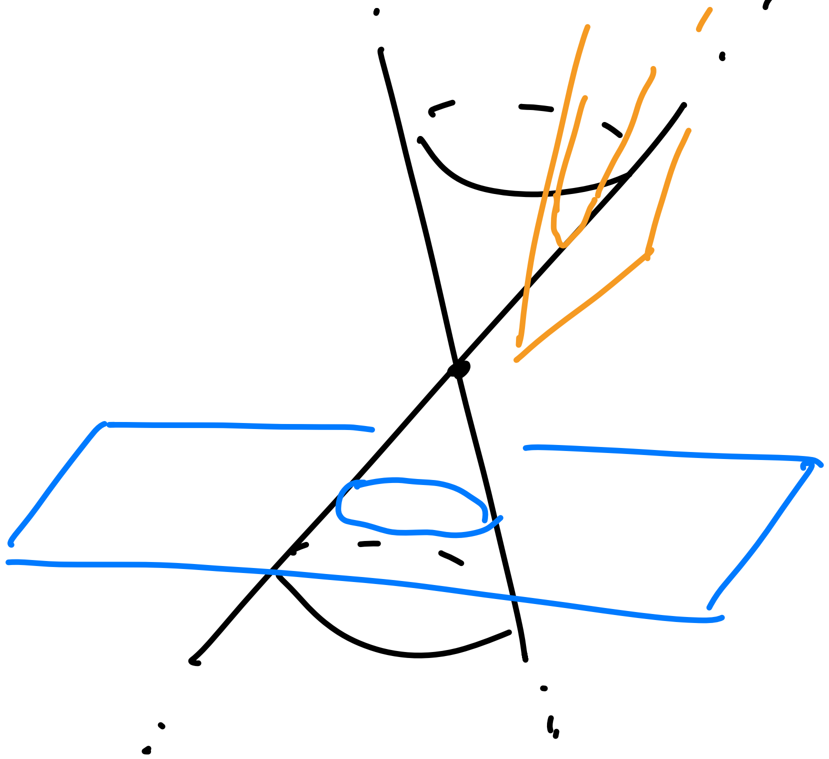
$$Q_0 = (3,-1), \quad Q_1 = (3,2)$$



$$\begin{cases} x = (\cancel{3-3})\,t + 3 \\ y = (-1-2)\,t - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = -3t - 1 \end{cases}$$

$$x = 3 \qquad x - 3 = 0$$

Coniche



Nella forma più generale una conica nel piano può essere espressa come luogo dei punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ che soddisfano un'equazione del tipo

$$\mathcal{C}: ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} = \tilde{A}$$

$\mathcal{C}$ rappresenta una (vera) conica

se $\underbrace{\det A \neq 0}$

$\iff 4acf + bde - (ae^2 + cd^2 + fb^2) \neq 0$

In questo caso se $\det \tilde{A} = ac - \frac{b^2}{4}$ è

< 0 $\mathcal{C}$ è iperbole

$= 0$ $\mathcal{C}$ è parabola

> 0 $\mathcal{C}$ è ellisse

⚠ se $\det A > 0$ e $\det \tilde{A} > 0$

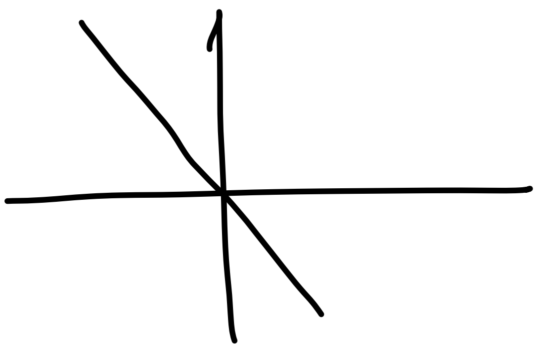
$\mathcal{C}$ è $\emptyset$

<u>Esempio</u>: $\boxed{x^2 + 2xy + y^2 = 0}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$

$(x+y)^2 = 0$

a	b	c	d	e	f
1	2	1	0	0	0



$x + y = 0$

esempio:

$r: \quad x+y-3=0$

$s: \quad 2x-y+1=0$

$r \cup s: \ (x+y-3)(2x-y+1)=0$

$$2x^2+xy-y^2-2x+4y-3=0$$

CIRCONFERENZA

Una circonferenza di centro C e raggio $r>0$ è il luogo dei punti nel piano la cui distanza da C è pari ad r.

I punti di una circonferenza sono tali che $\boxed{d(C,P)=r}$

Se $C=(x_0,y_0)$, $P=(x,y)$

$$d(C,P)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=r$$

Elevo al quadrato:

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2}$$

Espandendo trovo:

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0.$$

Facciamo il ragionamento inverso.

Consideriamo l'equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

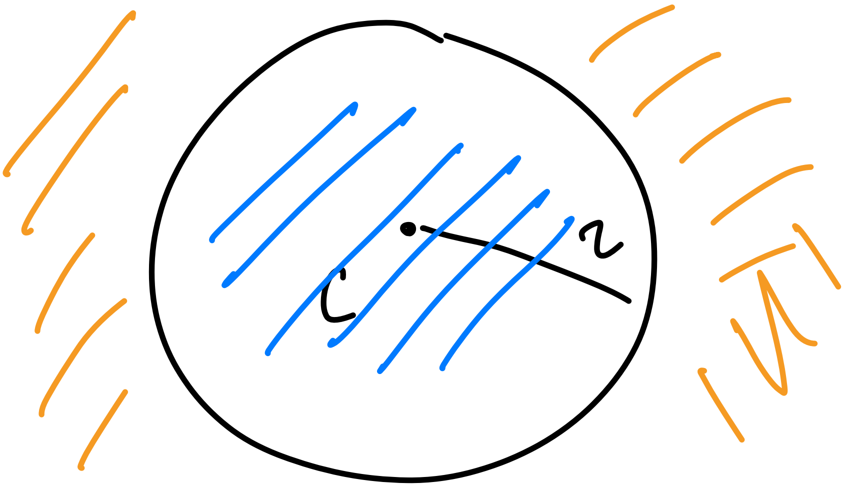
Questa rappresenta una circonferenza se e solo se $a^2 + b^2 - 4c > 0$.

Infatti, supponiamo che $a^2 + b^2 - 4c > 0$.

Allora $C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

$$\left[\begin{aligned} c &= x_0^2 + y_0^2 - r^2 \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - r^2 \\ 4c &= a^2 + b^2 - 4r^2 \\ 4r^2 &= a^2 + b^2 - 4c \end{aligned}\right]$$



$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

$$d(C,P)=r$$

Se P è tale che $d(C,P)<r$ allora P si dice INTERNO alla circonf.
Se $d(C,P)>r$, allora P si dice ESTERNO.

<u>Esempio</u>: Consideriamo l'equazione

$$x^2+y^2+2x-4y+4=0$$

Verificare che descriva una circonf.
Determinare centro e raggio.

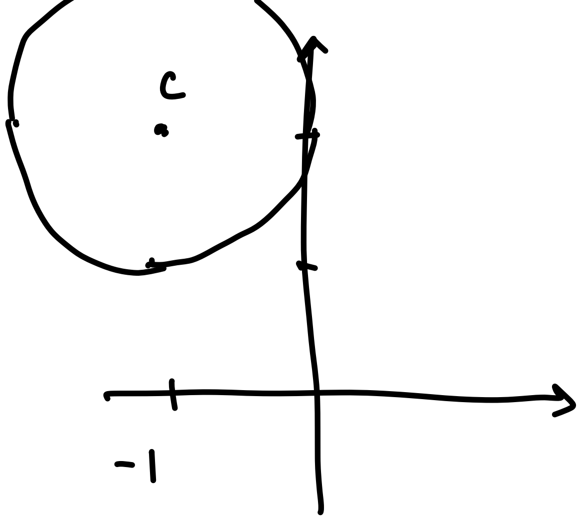
Per verificare che l'equazione descrive una circonf. calcolo a^2+b^2-4c

$$a^2+b^2-4c = 2^2+(-4)^2-4(4) =$$
$$= 4+16-16>0 \checkmark$$

Il raggio è pari a $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

cioè è pari a $\frac{1}{2}\sqrt{4}=1$

Il centro è dato da $\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)=(-1,2)$



Vediamo quando una retta r è tangente ad una circonferenza.

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

$$\begin{cases} x=\alpha t+x_0 \\ y=\beta t+y_0 \end{cases}$$

α e β NON sono entrambi nulli

Sostituendo, trovo:

$$(\alpha t+x_0)^2+(\beta t+y_0)^2+a(\alpha t+x_0)+b(\beta t+y_0)+c=0$$

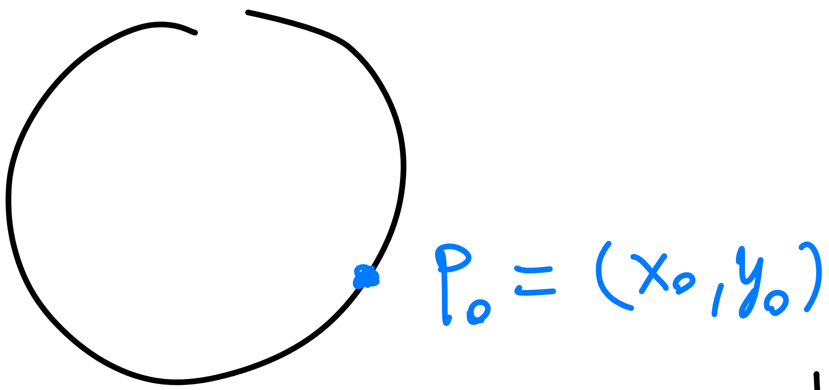
$$(\alpha^2+\beta^2)t^2+(2\alpha x_0+2\beta y_0+a\alpha+b\beta)t + x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c=0 \quad (*)$$

SE $(x_0,y_0)\in$ circonferenza $\Longrightarrow$ verifica l'equazione della circ., cioè $x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c=0$, cioè

il termine noto è zero.

$$(*)\quad (\alpha^2+\beta^2)t^2+(2\alpha x_0+2\beta y_0+a\alpha+b\beta)t=0$$

$$t\left[(\alpha^2+\beta^2)t+(2\alpha x_0+2\beta y_0+a\alpha+b\beta)\right]=0$$



la retta per P_0 sarà tangente alla circonferenza se $\boxed{2\alpha x_0+2\beta y_0+a\alpha+b\beta=0}$

$$(2x_0+a)\alpha+(2y_0+b)\beta=0$$

$$\beta=-\frac{(2x_0+a)}{(2y_0+b)}\alpha \qquad \forall\alpha$$

$\Rightarrow$ Deve essere vero se $\alpha=1$

$$\beta=-\frac{(2x_0+a)}{(2y_0+b)}$$

$$r: \begin{cases} x = t + x_0 \\ y = -\dfrac{(2x_0+a)}{(2y_0+b)} t + y_0 \end{cases}$$

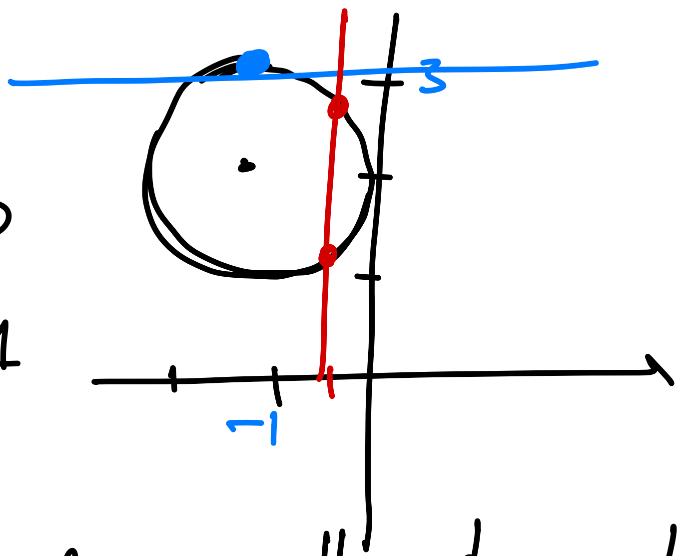
$$t = x - x_0 \implies y = -\frac{(2x_0+a)}{(2y_0+b)}(x-x_0)+y_0$$

$$(y-y_0)(2y_0+b) + (x-x_0)(2x_0+a) = 0$$

$$2x_0 x + 2y_0 y - x_0(2x_0+a) - y_0(2y_0+b) = 0$$

$$x_0 x + y_0 y - \frac{x_0}{2}(2x_0+a) - \frac{y_0}{2}(2y_0+b) = 0$$

Esempio:



$$x^2+y^2+2x-4y+4=0$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=1$$

Se $P_0 = (-1, 3)$ la retta tangente è $y = 3$

Se $P_1 = (-1/2, ??)$

$$(-1/2+1)^2+(y-2)^2=1$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 - 4y + 4 - 1 = 0$$

$$y^2 - 4y + \frac{13}{4} = 0$$

$$y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - \frac{13}{4}} =$$

$$= 2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3} = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$P_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{4+\sqrt{3}}{2}\right)$$

Determiniamo la retta per P_1 tangente alla circonf.

$$C \cap r \; ; \qquad r: \begin{cases} x = \alpha t - \frac{1}{2} \\ y = \beta t + \frac{4+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Devo determinare α e β

$$C \cap r: \begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ \begin{cases} x = \alpha t - \frac{1}{2} \\ y = \beta t + \frac{4+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\left(\alpha t - \tfrac{1}{2} + 1\right)^2 + \left(\beta t + \frac{4+\sqrt{3}}{2} - 2\right)^2 - 1 = 0$$

$$\left(\alpha t + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\beta t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 = 0$$

$$(\alpha^2+\beta^2)t^2 + (\alpha + \sqrt{3}\beta)\,t + \cancel{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} \cancel{-1} = 0$$

$$t\left[(\alpha^2+\beta^2)\,t + (\alpha+\sqrt{3}\beta)\right] = 0$$

$$\alpha + \sqrt{3}\,\beta = 0 \qquad \alpha = -\sqrt{3}\,\beta \quad \forall \beta \neq 0$$

de $\boxed{\beta = 1}$

$$r : \begin{cases} x = -\sqrt{3}\,t - \tfrac{1}{2} \\ y = t + \dfrac{4+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$t = y - \frac{4+\sqrt{3}}{2}$$

$$x = -\sqrt{3}\,y + \frac{\sqrt{3}}{2}(4+\sqrt{3}) - \frac{1}{2}$$

$$x + \sqrt{3}\,y + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(4+\sqrt{3}) = 0$$