15/09/2025

Cosa rappresenta il coefficiente angolare di una retta?

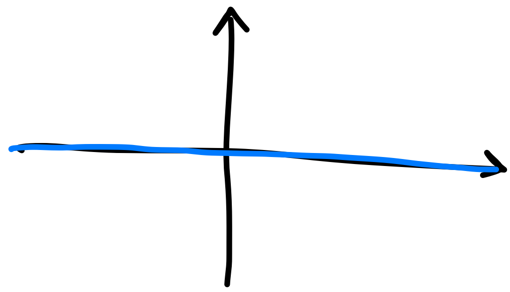
$$ax+by+c=0$$

Se $b \neq 0$ $\qquad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ $\qquad m = -\frac{a}{b}$

$\qquad = mx + q$ $\qquad q = -\frac{c}{b}$

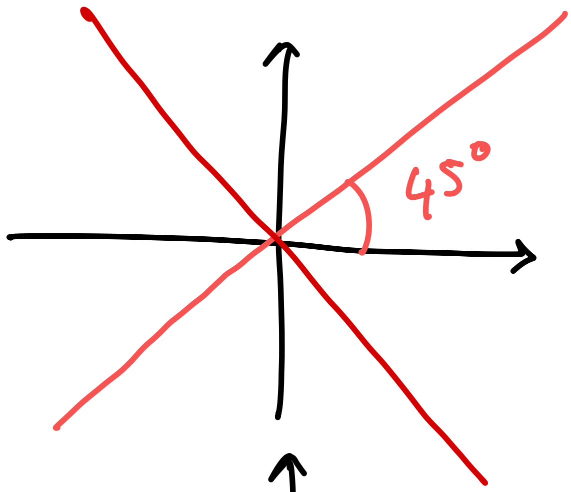
Esempi: $\quad y = mx$

$\boxed{m=0}$ $\qquad y = 0$



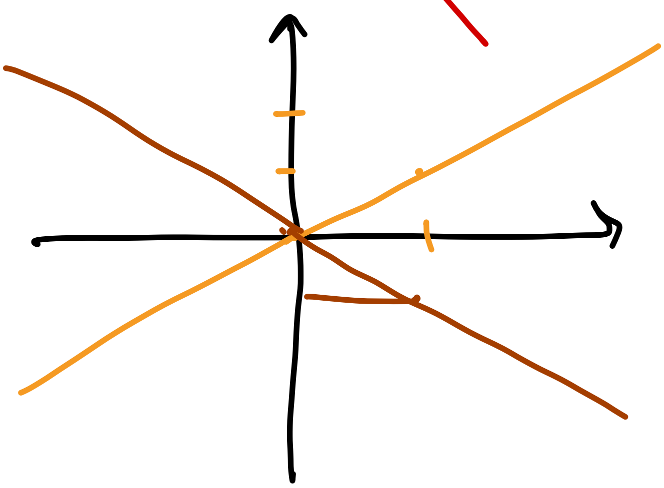
$\boxed{m=1}$ $\qquad y = x$

$y = -x$



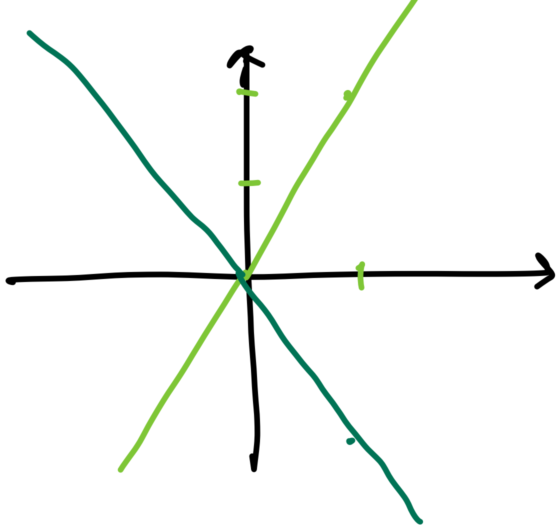
$\boxed{m=1/2}$ $\qquad y = \frac{1}{2}x$

$y = -\frac{1}{2}x$



$\boxed{m=2}$ $y=2x$

$y=-2x$



Se $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$ trovo un angolo di $30°$

Se $m=\sqrt{3}$ " " " $60°$

Posizione reciproca fra due rette

Due rette r ed r' nel piano possono essere:

- COINCIDENTI $(r=r')$ uguali come insiemi
- INCIDENTI $(r\cap r'=\{P\})$
- PARALLELE $(r\cap r'=\emptyset)$

Proviamo a vedere quando due rette passanti per l'origine sono coincidenti.

$r: ax+by=0$

$r': a'x+b'y=0$

Sicuramente $O \in r \cap r'$. Le due rette coincidono se $\exists\, P_0 \neq O$ tale che $P_0 \in r$ e $P_0 \in r'$ $(P_0 \in r \cap r')$.

Supponiamo che b e b' sono diversi da zero
$$y = -\frac{a}{b}x \qquad y = -\frac{a'}{b'}x$$

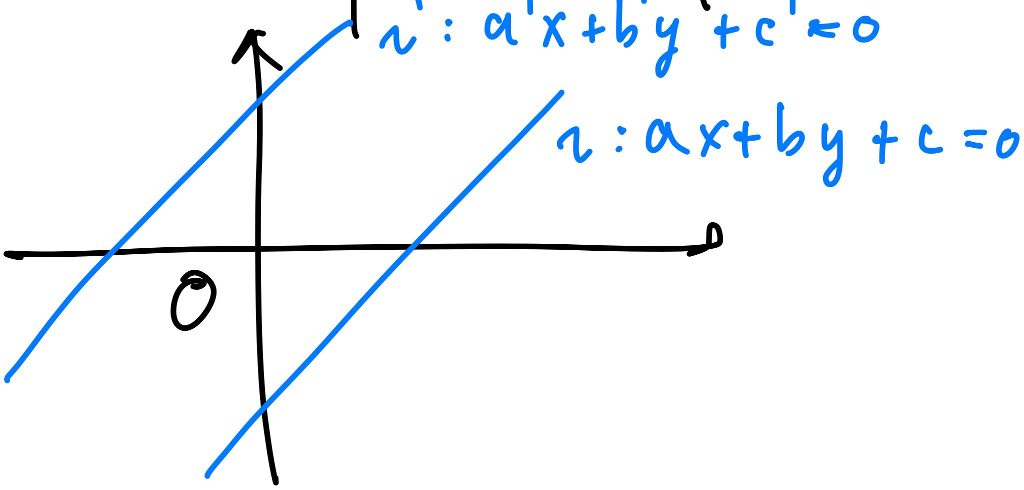
Supponiamo che $P_0 = (x_0, y_0) \in r \cap r'$

$$\Rightarrow \quad y_0 = -\frac{a}{b}x_0 \qquad y_0 = -\frac{a'}{b'}x_0$$

$$+\frac{a}{b} = +\frac{a'}{b'} \iff \boxed{ab' = a'b}$$

Questo ragionamento si può invertire.
Quindi r ed r' rette per O sono coincidenti $\iff ab' = a'b$.

Se non ~~passano~~ per O?



Se $O \notin r$ o $O \notin r'$ posso comunque determinare se sono PARALLELE o COINCIDENTI mediante la verifica precedente:

$ab' = a'b$.

Per distinguere i due casi, mi basta vedere se r ed r' hanno un punto in comune.

<u>Esempio</u>:

$$r: \ 2x - 3y + 1 = 0 \qquad ab' = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -3$$

$$r': \ x - \frac{3}{2}y - 7 = 0 \qquad a'b = 1 \cdot (-3) = -3$$

$\Rightarrow$ r ed r' sono PARALLELE o COINCIDENTI

Per vedere se sono coincidenti mi basta vedere se hanno un punto in comune:

$$r \cap r' = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x - 3y + 1 = 0 \quad e \\ x - \frac{3}{2}y - 7 = 0 \end{array} \right\}$$

Devo studiare il sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ x - \frac{3}{2}y - 7 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \text{"} \\ x = \frac{3}{2}y + 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\left(\frac{3}{2}y + 7\right) - 3y + 1 = 0 \\ \text{"} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \cancel{3y} + 14 - \cancel{3y} + 1 = 0 \\ \text{"} \end{cases} \quad 15 = 0 \;!!! \ldots$$

$\Rightarrow$ NON ci sono SOLUZIONI

$\Rightarrow \nexists\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.c. $(x,y) \in r \cap r'$

cioè $r \cap r' = \emptyset$.

A priori si potrebbe studiare DIRETTAMENTE il sistema definito da $r \cap r'$, cioè studiare

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

→ NON ha soluzioni: PARALLELE

→ 1 soluz.: INCIDENTI

→ ∞ soluz. COINCIDENTI.

esempi:

$r: 2x - y + 1 = 0$

$r': x + y + 3 = 0$

dire se sono PARALLELE, INCID., COINC.

$$r \cap r' : \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x+1 \\ x + 2x + 1 + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x+1 \\ 3x = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{5}{3} \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}$$ UNA SOLA SOLUZIONE

INCIDENTI

Esempio:

$$r : 2x - y + 1 = 0 \quad 3$$

$$r' : x - \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} = 0$$

$$r \cap r' : \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \quad 3 \\ x - \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x + 1 \quad 3 \\ \cancel{x} - \cancel{x} - \frac{1}{2}^{3} + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \quad 0 = 0$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$ trovo una $y \; (= 2x+1)$ $\quad 1 = 0$ NON ho soluz.

$\Rightarrow$ ho ∞ soluzioni $\Rightarrow r = r'$

Quando 2 rette r ed r' sono ortogonali (perpendicolari)?

È un caso specifico, particolare, di 2 rette incidenti $r \cap r' = \{P\}$

Esempi:

Le rette $x=0$, $y=0$ sono ortogonali

$$\left(\begin{array}{l} x+c=0 \\ y+d=0 \end{array} \ \forall c, d \in \mathbb{R} \right)$$

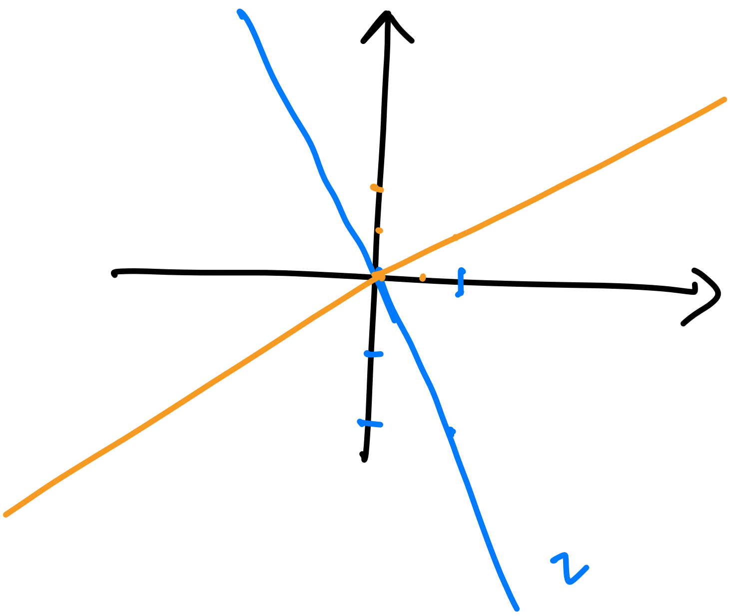
Le rette $x+y=0$, $x-y=0$ sono ortogonali

Le rette $r \quad 2x+y=0$

$r' \quad x-2y=0$ sono ortog.

$r: y=-2x$

$r': y=\frac{1}{2}x$



Le rette $3x+6y=0$, $6x-3y=0$ sono ortog.

In generale se $r: ax+by+c=0$
$r': a'x+b'y+c'=0$

sono ortogonali se
$$\boxed{aa'+bb'=0}$$

Se $r: y=mx+q$ e $r'=m'x+q'$
sono ortogonali se $\boxed{m \cdot m' = -1}$

(fare la verifica per casa)

Esercizio: Sia data la retta

di equazione $r: 2x-3y+1=0$.

Determinare la retta s PARALLELA ad r passante per $(-1,-1)$.

Determinare la retta t ORTOGONALE ad r passante per $(2,3)$

Poiché $s: ax+by+c=0$ è parallela ad r, allora posso scegliere a e b

identici a quelli di r, cioè

$a = 2$
$b = -3$

$s: 2x - 3y + c = 0$

$\left(\begin{array}{l} ab' = a'b \\ 2b' = -3a' \end{array} \right)$

Determino c imponendo il passaggio per $(-1;-1)$: cioè se $x = -1$, $y = -1$ l'equazione di s DEVE essere verificata:

$2(-1) - 3(-1) + c = 0$

$-2 + 3 + c = 0$ $\boxed{c = -1}$

$s: 2x - 3y - 1 = 0$

Ora determino la retta t ortogonale ad r passante per $(2,3)$

$r: 2x - 3y + 1 = 0$

$t: a'x + b'y + c' = 0$

Poiché t è ortog. ad r, deve valere

$2 \cdot a' + (-3)b' = 0$. $(aa' + bb' = 0)$

Basta prendere $a' = 3 \quad b' = 2$

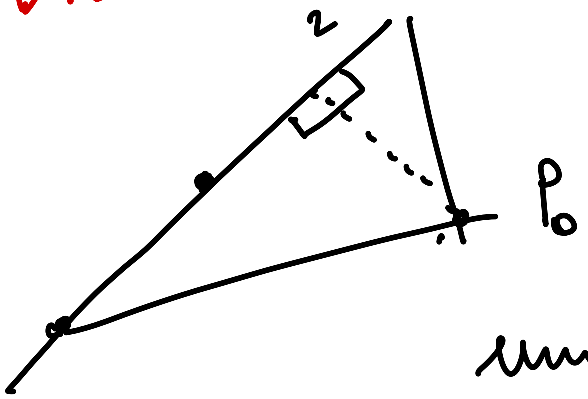
$t : 3x + 2y + c' = 0$

Per determinare c' impongo il passaggio per $(2,3)$

$3 \cdot (2) + 2 \cdot (3) + c' = 0 \qquad c' = -12$

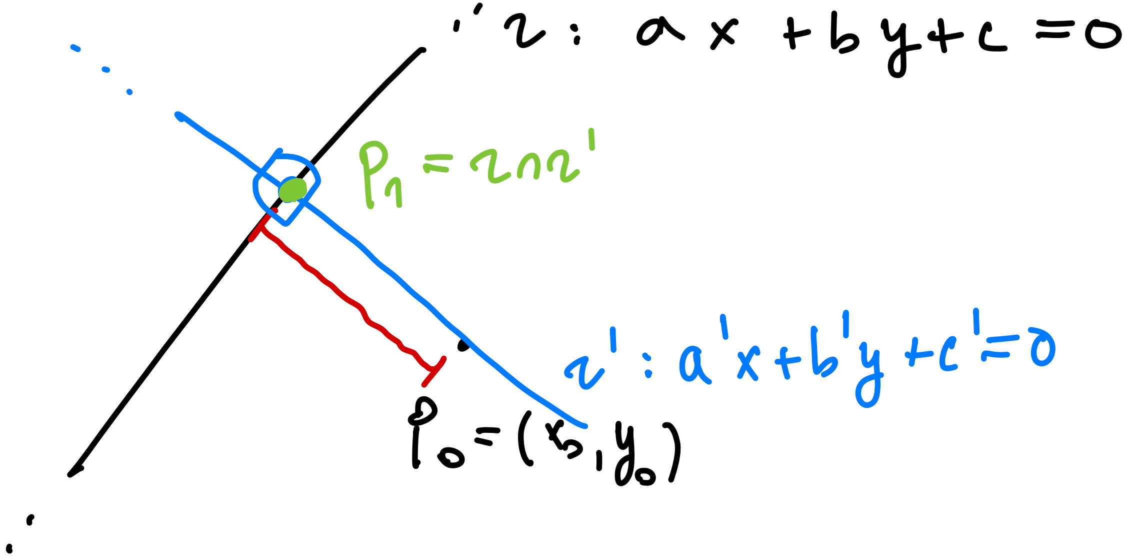
$t : 3x + 2y - 12 = 0$

Distanza Punto – Retta



Per determinare la distanza fra un punto P_0 e una retta r, calcolo la distanza fra P_0 e il punto $P_1 \in r$ più vicino a P_0.

P_1 sarà dato dalla proiezione ortogonale di P_0 su r. Cioè P_1 sarà l'intersezione fra r e la retta ortogonale ad r passante per P_0.



$$d(P_0, r) := d(P_0, P_1)$$

$r: ax+by+c=0$

$r': a'x+b'y+c'=0$

Poiché r' è ortogonale ad r, posso scegliere a', b' in funzione di a e b

$r': bx-ay+c'=0$

Per determinare c', impongo il passaggio per $P_0 = (x_0, y_0)$

$$bx_0 - ay_0 + c' = 0 \iff c' = ay_0 - bx_0$$

$$\boxed{r': bx-ay+(ay_0-bx_0)=0}$$

$$\{P_1\} = r \cap r' : \begin{cases} ax+by+c=0 \\ bx-ay+(ay_0-bx_0)=0 \end{cases}$$

Almeno uno fra a e b è diverso da zero. Diciamo $b \neq 0$. Dalla seconda equazione ottengo

$$x = \frac{a}{b} y + x_0 - \frac{a}{b} y_0 = x_0 + \frac{a}{b}(y - y_0)$$

Sostituendo nella prima trovo:

$$a\left[x_0 + \frac{a}{b}(y-y_0)\right] + by + c = 0$$

$$\left(\frac{a^2}{b} + b\right) y + a x_0 - \frac{a^2}{b} y_0 + c = 0$$

$$\left(\frac{a^2+b^2}{b}\right) y = \frac{a^2}{b} y_0 - a x_0 - c$$

$$y = \frac{1}{a^2+b^2}\left[a^2 y_0 - ab x_0 - bc\right]$$

$$\Rightarrow x = x_0 + \frac{a}{b}\left\{\frac{1}{a^2+b^2}\left[a^2 y_0 - ab x_0 - bc\right] - y_0\right\}$$

$$= \frac{1}{b}\,\frac{1}{a^2+b^2}\left[b(\cancel{a^2}+b^2)x_0 + \cancel{a^3 y_0} - \cancel{a^2 b x_0} - abc + - a(\cancel{a^2}+b^2)y_0\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{b}}\,\frac{1}{a^2+b^2}\left[b^{\overset{2}{\cancel{3}}} x_0 - a\cancel{b}c - ab^{\cancel{2}} y_0\right]$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left[b^2 x_0 - a b y_0 - ac\right]$$

$$d(P_0, 2) = d(P_0, P_1) =$$

$$\sqrt{\left(x_0 - \frac{1}{a^2+b^2}\left[b^2x_0 - aby_0 - ac\right]\right)^2 + \left(y_0 - \frac{1}{a^2+b^2}\left[a^2y_0 - abx_0 - bc\right]\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{(a^2+b^2)^2}\left((a^2+\cancel{b^2})x_0 - \cancel{b^2x_0} + aby_0 + ac\right)^2 + \frac{1}{(a^2+b^2)^2}\left((\cancel{a^2}+b^2)y_0 - \cancel{a^2y_0} + abx_0 + bc\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{(a^2+b^2)^2}\left[a^2(ax_0+by_0+c)^2 + b^2(ax_0+by_0+c)^2\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{\cancel{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{\cancel{2}}}(ax_0+by_0+c)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left|ax_0+by_0+c\right|.$$