IMPLICAZIONE LOGICA

8/9/2025

È un connettivo binario che esprime la relazione di causa-effetto.

Se P e Q sono due enunciati, si indica con $P \Rightarrow Q$ e si legge ("P implica Q",
$P \rightarrow Q$
"Se P, allora Q"). Definiamo $P \Rightarrow Q$ mediante la sua tavola di verità

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

"EX FALSO SEQUITUR QUODLIBET"

<u>Proprietà</u>: $P \Rightarrow Q \equiv (\neg P) \vee Q$

P	Q	$\neg P$	$(\neg P) \vee Q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Quindi se voglio negare $P \Rightarrow Q$, basta negare $(\neg P) \vee Q$.

$$\neg (P \Rightarrow Q) \equiv \neg((\neg P) \vee Q) \equiv P \wedge (\neg Q)$$

È possibile definire un altro connettivo che esprime l'equivalenza fra P e Q.
È la DOPPIA IMPLICAZIONE, si indica con
$P \Leftrightarrow Q$ e si legge "P se e solo se Q",
$P \longleftrightarrow Q$

"P è equivalente a Q",
"Condizione necessaria e sufficiente affinché Q è P"

La tavola di verità di $P \Leftrightarrow Q$ è data da

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

<u>Osservazione</u>: se $A \equiv B$, allora $A \Leftrightarrow B$ è una tautologia

(es) Mostrare che
$$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

Esempio P: "Piove"
Q: "Prendo l'ombrello"

DICIAMO (supponiamo che) $P \Rightarrow Q$ sia vero.
Allora se NON prendo l'ombrello implica che NON piove.

$$P \Rightarrow Q \equiv (\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$$

CONTRONOMINALE

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Osservazione: se ho P e Q enunciati, quante sono le possibili tavole di verità?

P	Q		$\vee$						$\Leftrightarrow$	$\dot{\vee}$		$\wedge$				
V	V	V	V	V	V	F	V	V	V	F	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	F	V	V	F	F	V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	V	F	V	F	V	V	F	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V	F	F	V	F	V	F	F	F	V	F

$$\neg(A \Leftrightarrow B) \equiv A \,\dot{\vee}\, B$$

PARENTESI: Cos'è un Teorema?

(Lemma, Proposizione, Corollario, Claim, ...)

Un TEOREMA è un enunciato che contiene un'implicazione logica

$$H \Rightarrow T,$$

dove H e T sono enunciati,

H è detto IPOTESI

T è detto TESI.

(Nel linguaggio quotidiano dire che un'affermazione è un teorema vuol dire che è un TEOREMA VERO.

Sempre nel linguaggio comune se $H \Rightarrow T$ è FALSO non lo chiamiamo teorema.

Se non sappiamo se $H \Rightarrow T$ è vero o falso, nel linguaggio comune diciamo che è una congettura).

Cosa vuol dire dimostrare un teorema?

Vuol dire provare la validità dell'implicazione $H \Rightarrow T$, cioè supponendo che H sia vero, provare, mediante l'equivalenza o l'implicazione di altri fatti (enunciati) che so essere veri perché H è vero, che anche T è vero.

ESERCIZI: Tradurre le seguenti frasi in simboli logici, calcolare la tavola di verità e la loro negazione.

1) Mangio e bevo se e solo se esco di casa.

A: "mangio", B: "bevo"

C: "esco di casa"

$$(A \wedge B) \Leftrightarrow C$$

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \Leftrightarrow C$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	F
F	F	F	F	V

$$\neg\left[(A \wedge B) \Leftrightarrow C\right] \left(\equiv (A \wedge B) \dot{\vee} C\right)$$

$$\equiv \neg\left[\left[(A \wedge B) \Rightarrow C\right] \wedge \left[C \Rightarrow (A \wedge B)\right]\right]$$

$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$

$$\equiv \left[\neg\left[(A \wedge B) \Rightarrow C\right]\right] \vee \left[\neg\left[C \Rightarrow (A \wedge B)\right]\right]$$

$P \Rightarrow Q \equiv (\neg P) \vee Q$

$$\equiv \left[\neg\left[\left[\neg(A \wedge B)\right] \vee C\right]\right] \vee \left[\neg\left[(\neg C) \vee (A \wedge B)\right]\right]$$

$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$

$$\equiv \left[\left[\neg\left[\neg(A \wedge B)\right]\right] \wedge (\neg C)\right] \vee \left[\left[\neg(\neg C)\right] \wedge \left[\neg(A \wedge B)\right]\right]$$

$\neg(\neg P) \equiv P$

$$\equiv \left[(A \wedge B) \wedge (\neg C)\right] \vee \left[C \wedge \left[(\neg A) \vee (\neg B)\right]\right]$$

Esempio

Se non è vero che (hai visto Londra o Mosca), e hai visto Londra, allora hai visto Mosca e Berlino.

A: "Hai visto Londra"

B: "Hai visto Mosca"

C: "Hai visto Berlino"

$$\{[\neg(A \lor B)] \land A\} \Rightarrow (B \land C)$$

A	B	C	$A \lor B$	$\neg(A \lor B)$	$[\neg(A \lor B)] \land A$	$B \land C$	$\{[\neg(A \lor B)] \land A\} \Rightarrow (B \land C)$
V	V	V	V	F	F	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F	F	V
F	F	F	F	V	F	F	V

TAUTOLOGIA

$$\neg\left\{\left\{[\neg(A\vee B)]\wedge A\right\} \Rightarrow (B\wedge C)\right\} \equiv$$

$$P \Rightarrow Q \equiv (\neg P)\vee Q$$

$$\neg\left\{\left[\neg\left\{[\neg(A\vee B)]\wedge A\right\}\right]\vee (B\wedge C)\right\}$$

$$\left\{\cancel{\neg}\left[\cancel{\neg}\left\{[\neg(A\vee B)]\wedge A\right\}\right]\right\}\wedge\left[\neg(B\wedge C)\right]$$

$$\neg(\neg P)\equiv P$$

$$\left\{[\neg(A\vee B)]\wedge A\right\}\wedge\left[(\neg B)\vee(\neg C)\right] \equiv$$

$$\equiv \left\{[(\neg A)\wedge(\neg B)]\wedge A\right\}\wedge\left[(\neg B)\vee(\neg C)\right].$$

Per verificare che sia tutto corretto posso calcolare la tavola di verità!