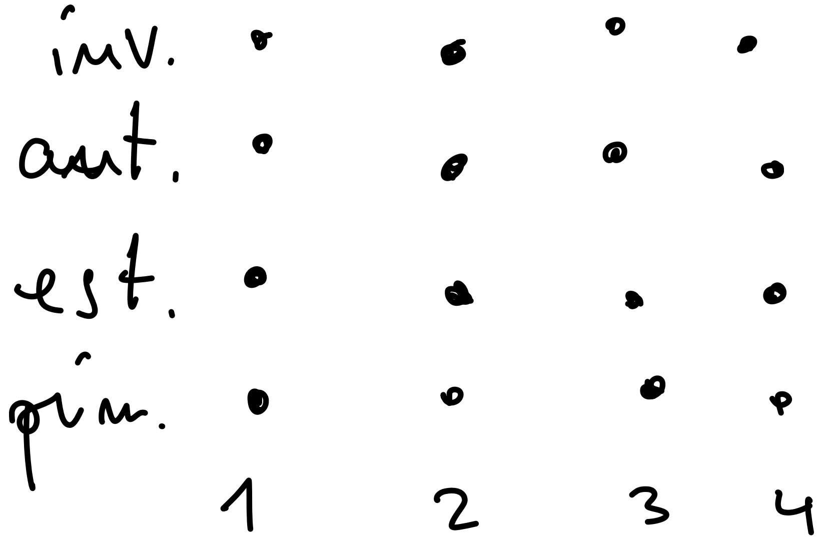
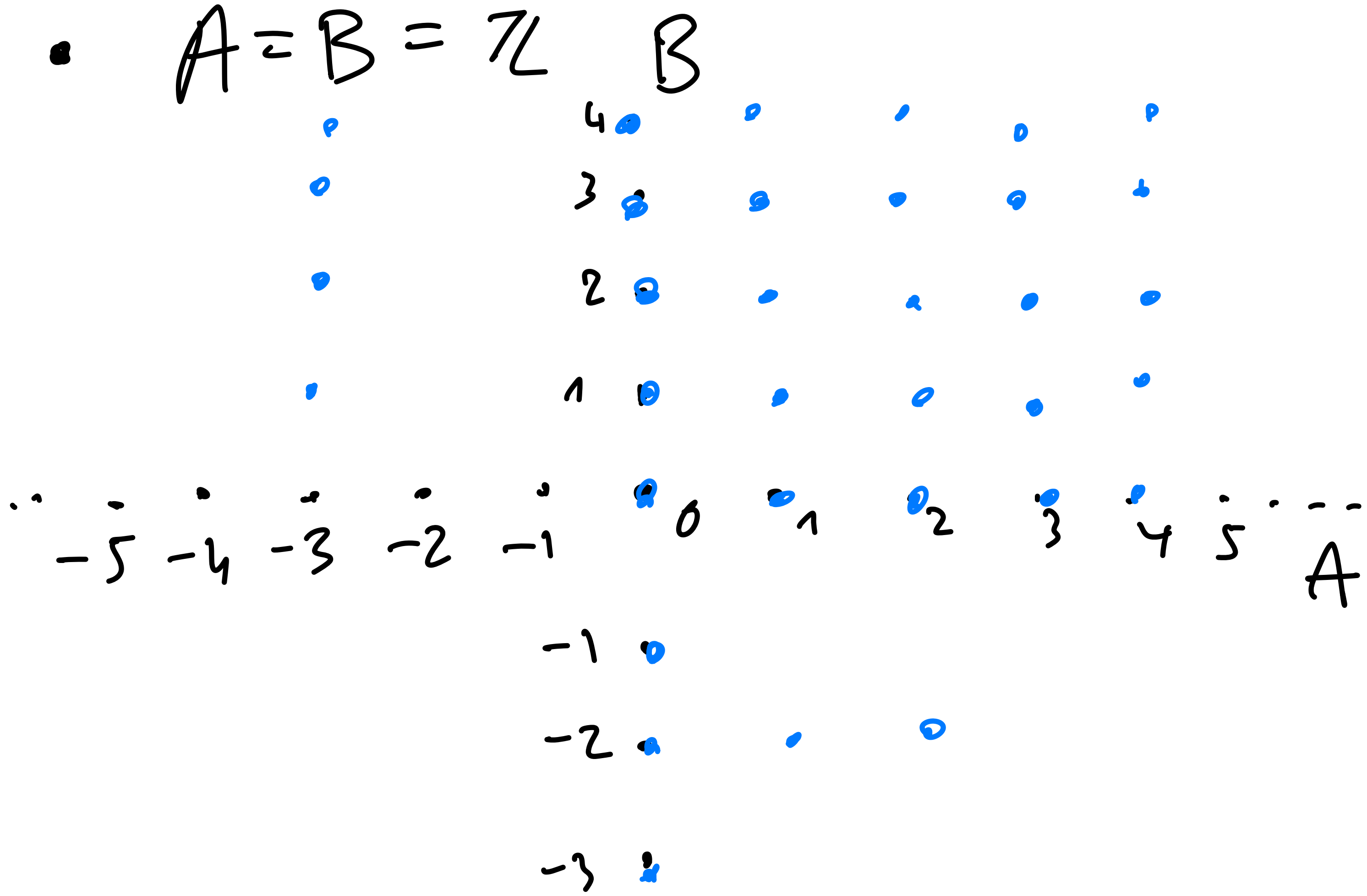
11/09/2025

Esempio: $A = \{1, 2, 3, 4\}$

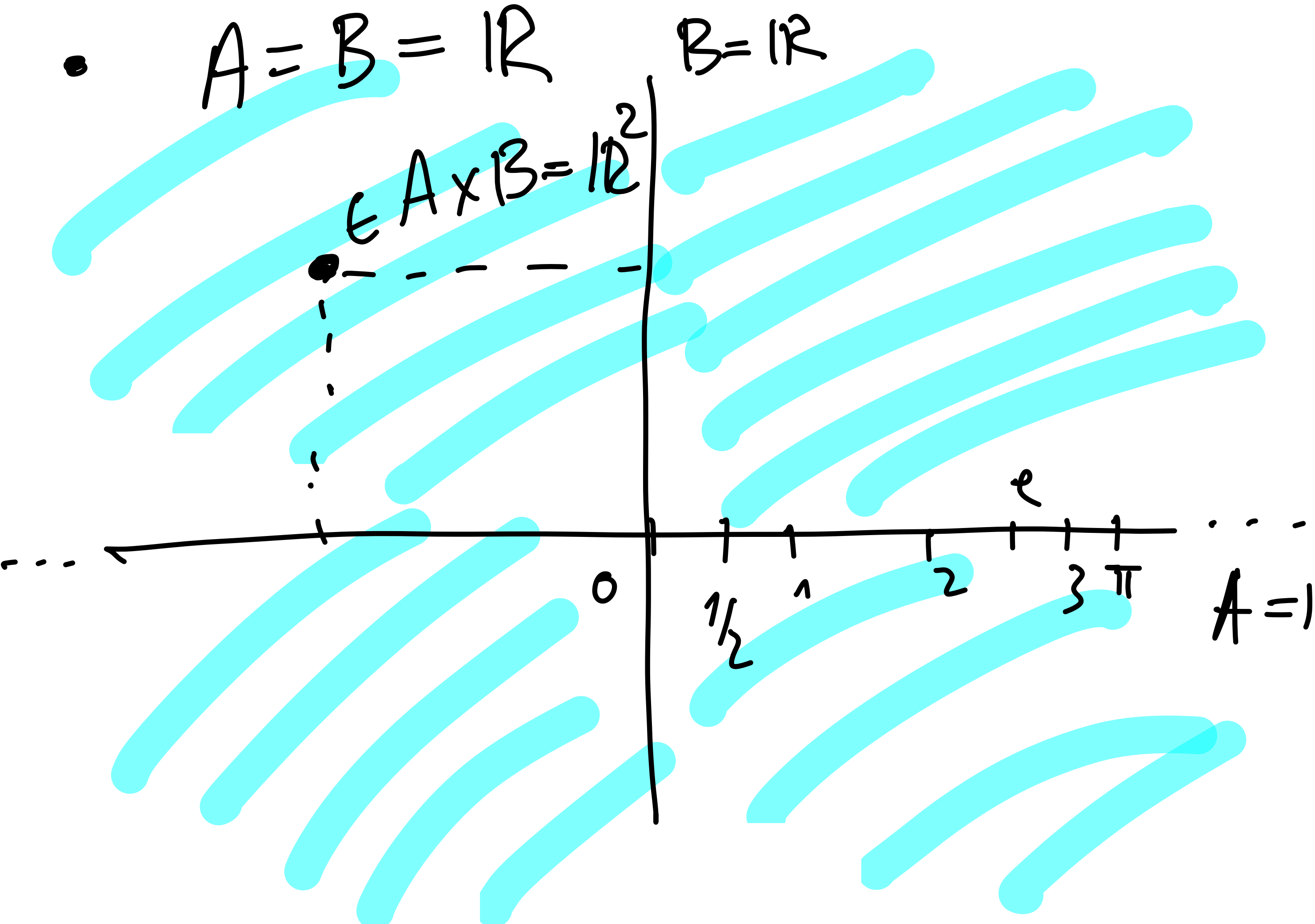
$B = \{$prim., est., aut., inv.$\}$



• $A = B = \mathbb{Z}$

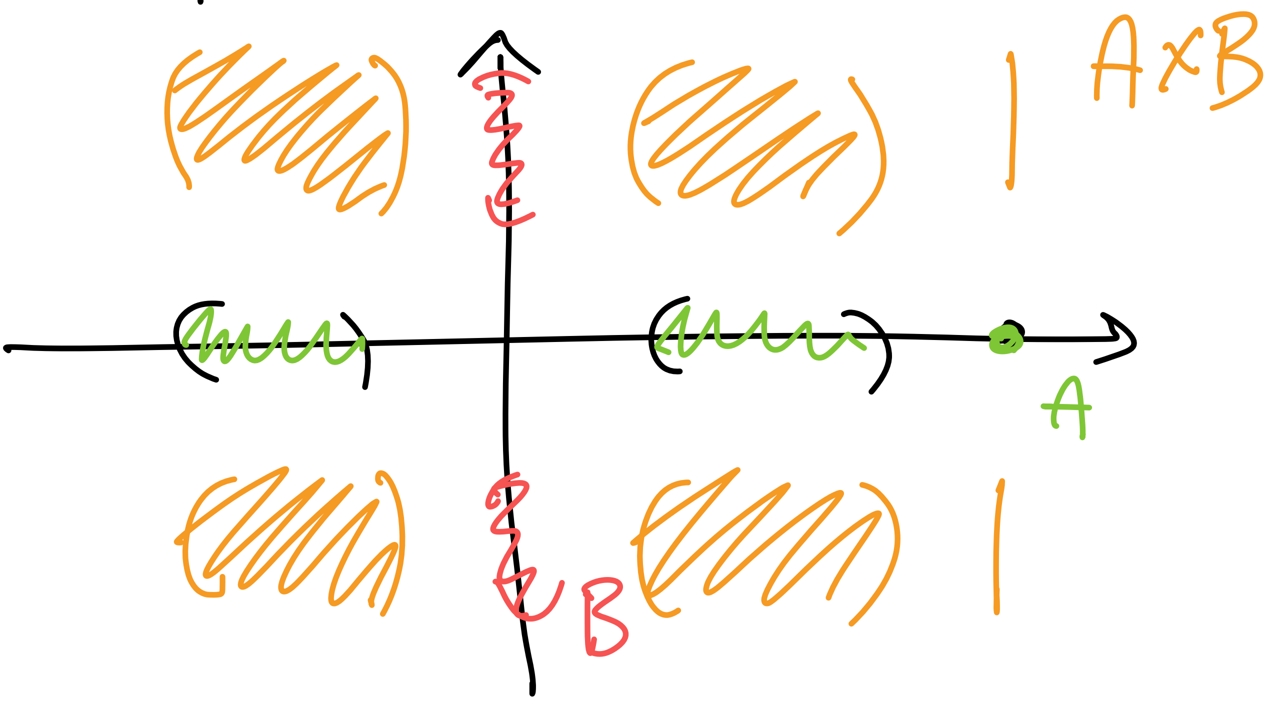


- $A = B = \mathbb{R}$



Verificare che $(A\times B)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times B^c)$

$A \subseteq X,\ B \subseteq Y$



Dimostriamo che $(A \times B)^c \subseteq (A^c \times Y) \cup (X \times B^c)$

Sia $x \in (A \times B)^c$ devo dimostrare

che $x \in (A^c \times Y) \cup (X \times B^c)$ cioè

$x \in A^c \times Y \vee x \in X \times B^c$

Cosa vuol dire che $x \in (A \times B)^c$?

Vuol dire che $x = (c, d) \in X \times Y$

ma $x \notin A \times B$

Ma $A \times B = \{(a, b) \in X \times Y \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$

Quindi se $x \notin A \times B$ vuol dire

che $c \notin A \vee d \notin B$

Allora $(c, d) \in (A^c \times Y)$ oppure

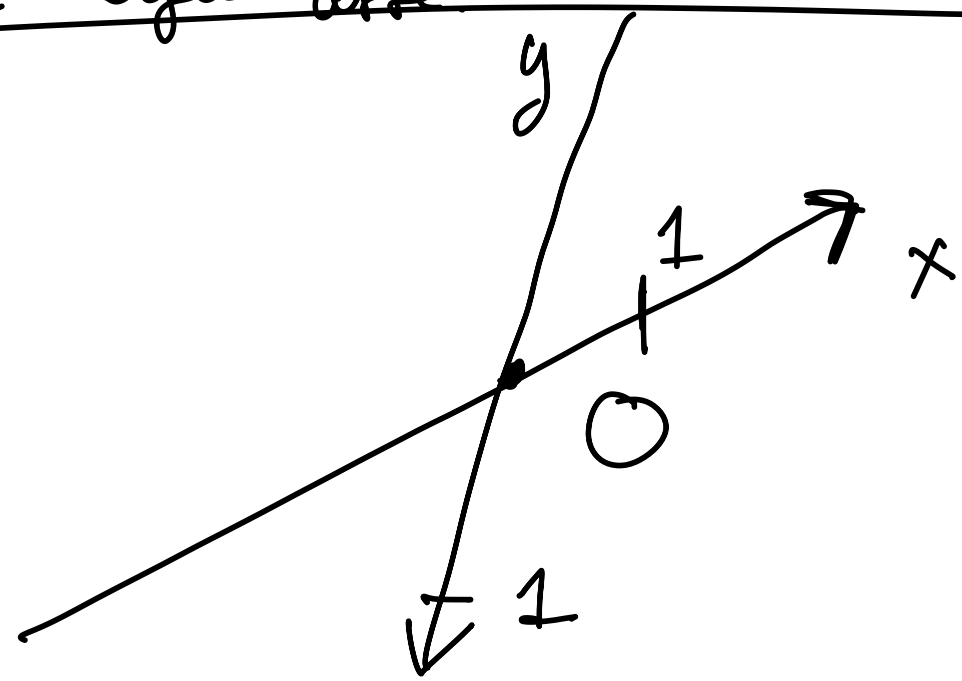
$(c, d) \in (X \times B^c)$

Fare l'altra inclusione per casa.

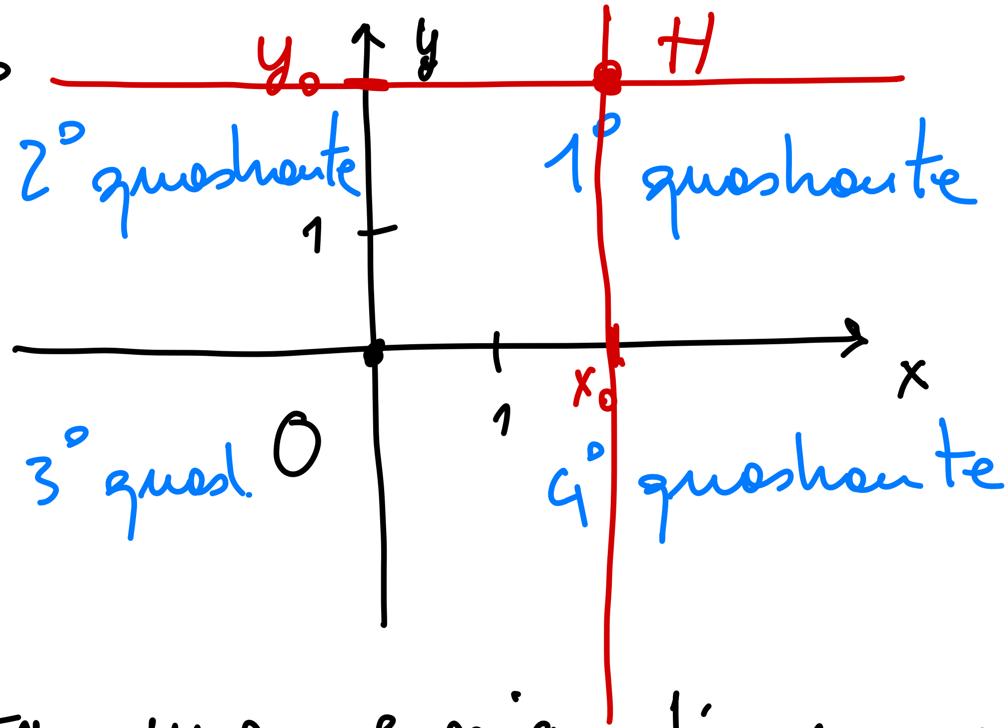
Geometria del piano

Consideriamo, nel piano Euclideo, un sistema di riferimento Cartesiano Oxy dato da

- O un punto qualsiasi detto ORIGINE
- due rette (perpendicolari) incidenti in O dette asse delle ASCISSE e asse delle ORDINATE, indicate con x e y
- un verso di percorrenza per ogni asse
- un'unità di misura (spesso la stessa) per ogni asse



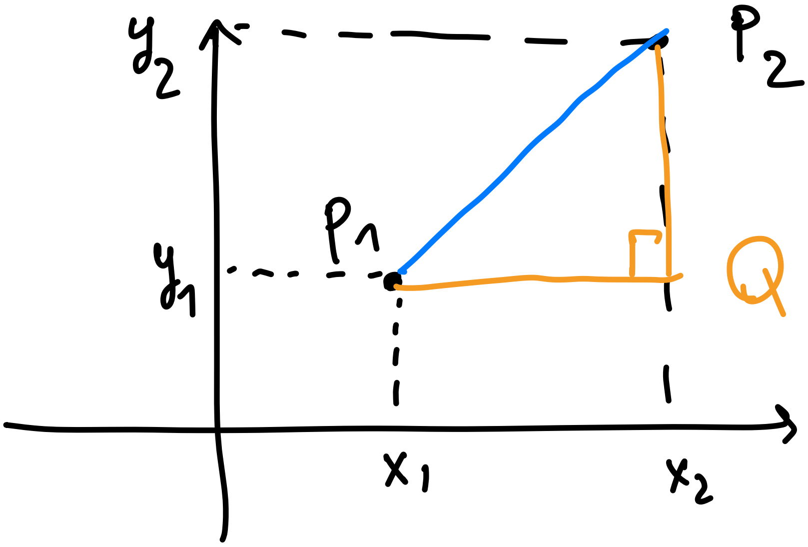
Scegliamo questo



Fissata una coppia di numeri reali $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, associamo il punto H ottenuto intersecando la retta parallela ad y passante per x_0 sull'asse x e la retta parallela ad x passante per y_0 sull'asse y.

Ogni punto punto, usando la costruzione inversa, può essere identificato da una coppia di numeri reali.

Dati due punti P_1 e P_2, come calcolo la distanza fra di essi?



$P_1 = (x_1, y_1)$

$P_2 = (x_2, y_2)$

$P_1(x_1, y_1)$

$P_2(x_2, y_2)$

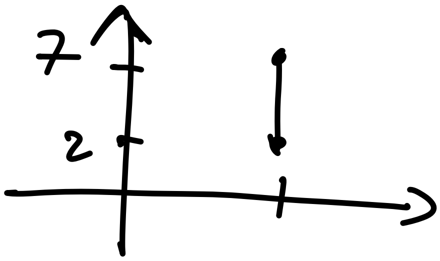
La distanza fra P_1 e P_2 è pari alla lunghezza del segmento che li congiunge. Consideriamo il punto Q ottenuto intersecando la retta passante per $(0, y_1)$ e P_1 e la retta passante per P_2 e $(x_2, 0)$.
Allora $P_1 P_2 Q$ è un triangolo rettang.
Quindi la DISTANZA fra P_1 e P_2, indicata con $d(P_1, P_2)$ posso calcolarla mediante il teorema di Pitagora.

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Esempio: $P_1 = (1, 4)$
$P_2 = (-2, 3)$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-4)^2}$$
$$= \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$Q_1 = (3, 2)$
$Q_2 = (3, 7)$



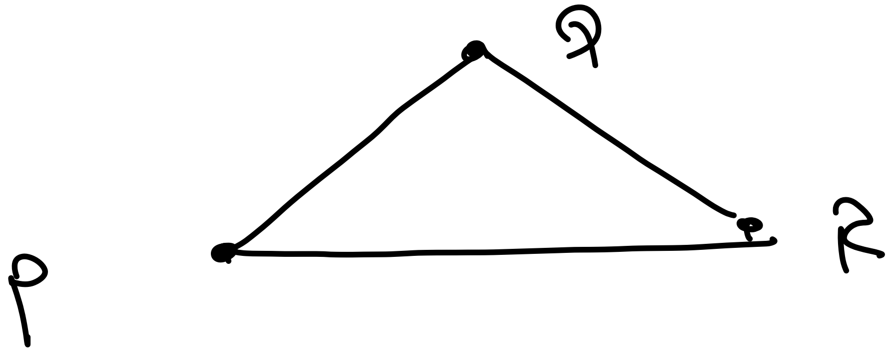
$$d(Q_1, Q_2) = \sqrt{\cancel{(3-3)^2} + (7-2)^2} = 5$$

Valgono le seguenti proprietà:

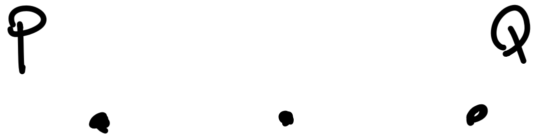
① $\forall\ P, Q \quad d(P,Q) \geq 0$ inoltre
$d(P,Q) = 0 \iff P = Q$

② $\forall\ P, Q \quad d(P,Q) = d(Q,P)$

③ $\forall\ P, Q, R$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE
$$d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$$



Punto medio o baricentro



Se $P=(x_1,y_1)$ e $Q=(x_2,y_2)$, allora il punto medio fra P e Q è dato da $M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

$$d(P,M)=\sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2}-x_1\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2}{2}-y_1\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2+\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right)^2}$$

$$d(Q,M)=\sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2}-x_2\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2}{2}-y_2\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)^2}$$

$$=d(P,M)$$

Se ho $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2), \dots, P_N = (x_N, y_N)$

chiamo BARICENTRO dei punti $P_1, \dots, P_N$, il punto $B = \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}, \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_N}{N} \right)$

<u>Esempio</u>: $P_1 = (-3, 2)$, $P_2 = (1, 3)$

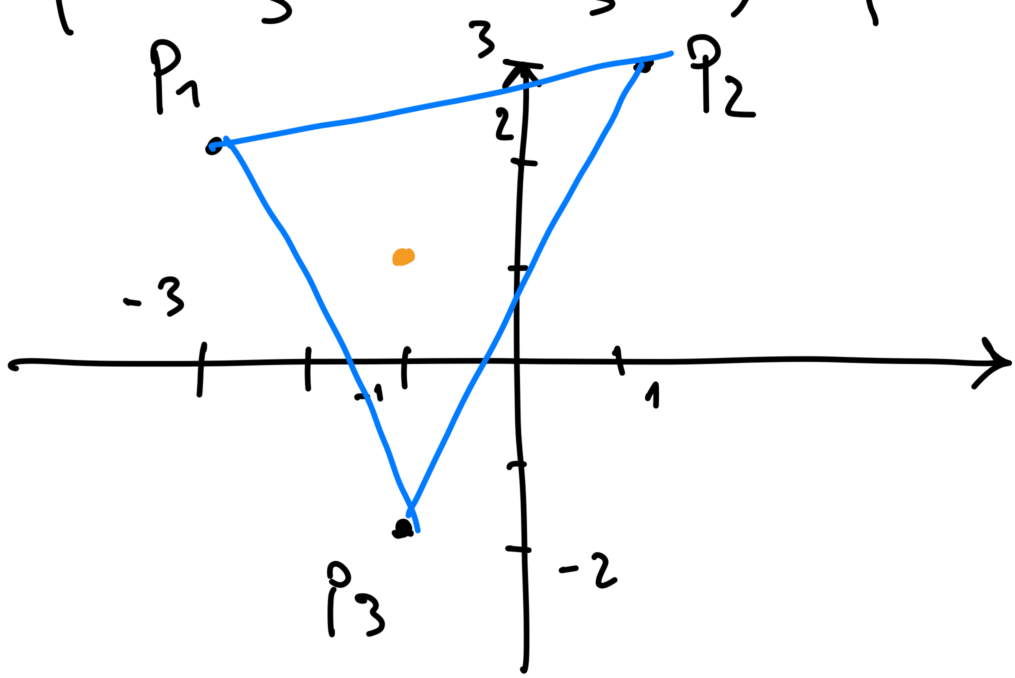
$P_3 = (-1, -2)$

Punto medio M_{13} fra P_1 e P_3

$$M_{13} = \left(\frac{-1-3}{2}, \frac{-2+2}{2} \right) = (-2, 0)$$

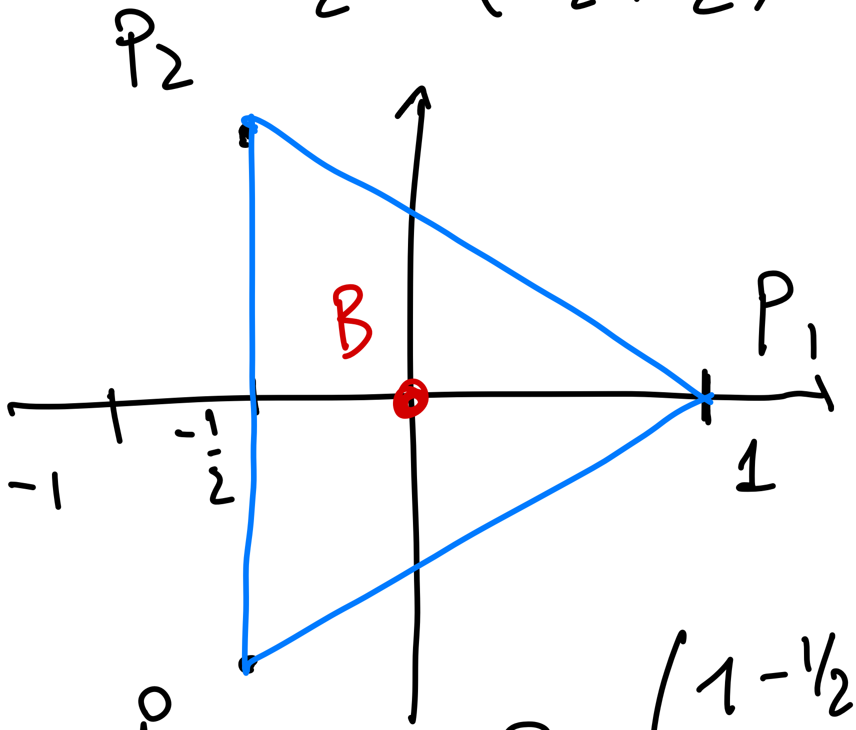
Baricentro B fra P_1, P_2, P_3

$$B = \left(\frac{-3+1-1}{3}, \frac{2+3-2}{3} \right) = (-1, 1)$$



Esempio: $P_1 = (1,0)$

$P_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $P_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



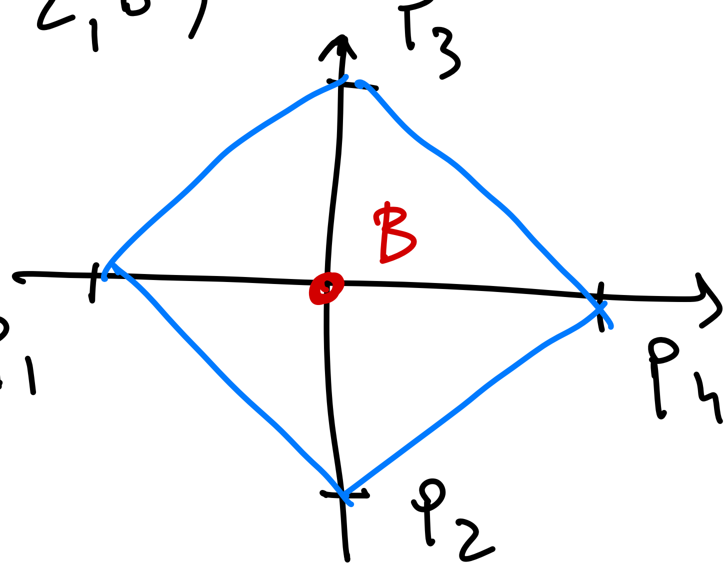
$$B = \left(\frac{1 - 1/2 - 1/2}{3}, \frac{\sqrt{3}/2 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} \right)$$

$$= (0,0)$$

Esempio:

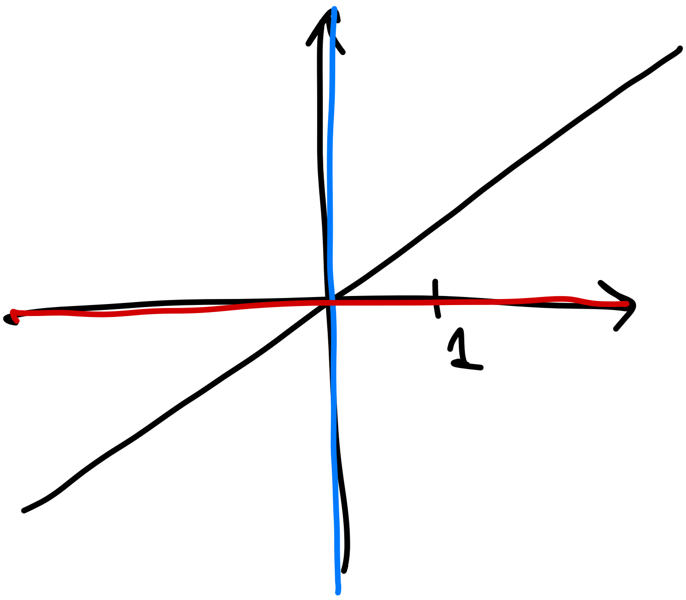
$P_1 = (-2, 0)$, $P_2(0,-2)$, $P_3(0,2)$

$P_4(2,0)$



$$B = \left(\frac{-2+0+0+2}{4}, \frac{0-2+2+0}{4} \right) = O$$

Equazioni Cartesiane e parametriche di una retta.



$\boxed{y=0}$

$\boxed{x=0}$

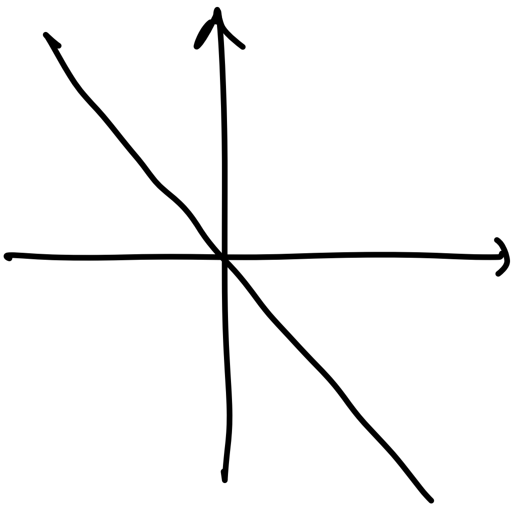
Una retta che passa per O si può descrivere mediante un'equazione del tipo

$$ax+by=0$$

con a e b NON entrambi nulli

$\boxed{x^2=0}$ Descrive l'asse delle ascisse

$x+y=0 \iff y=-x$



$(x+y)^2=0$

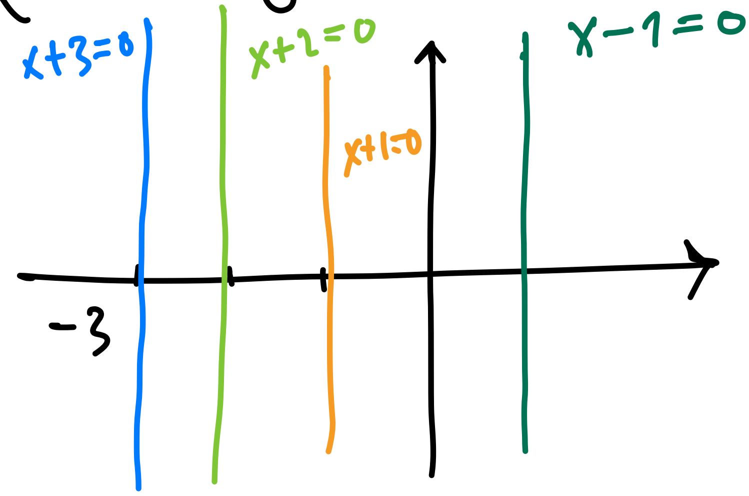
$x^2+2xy+y^2=0$

In generale una retta nel piano può essere descritta da un'equazione del tipo

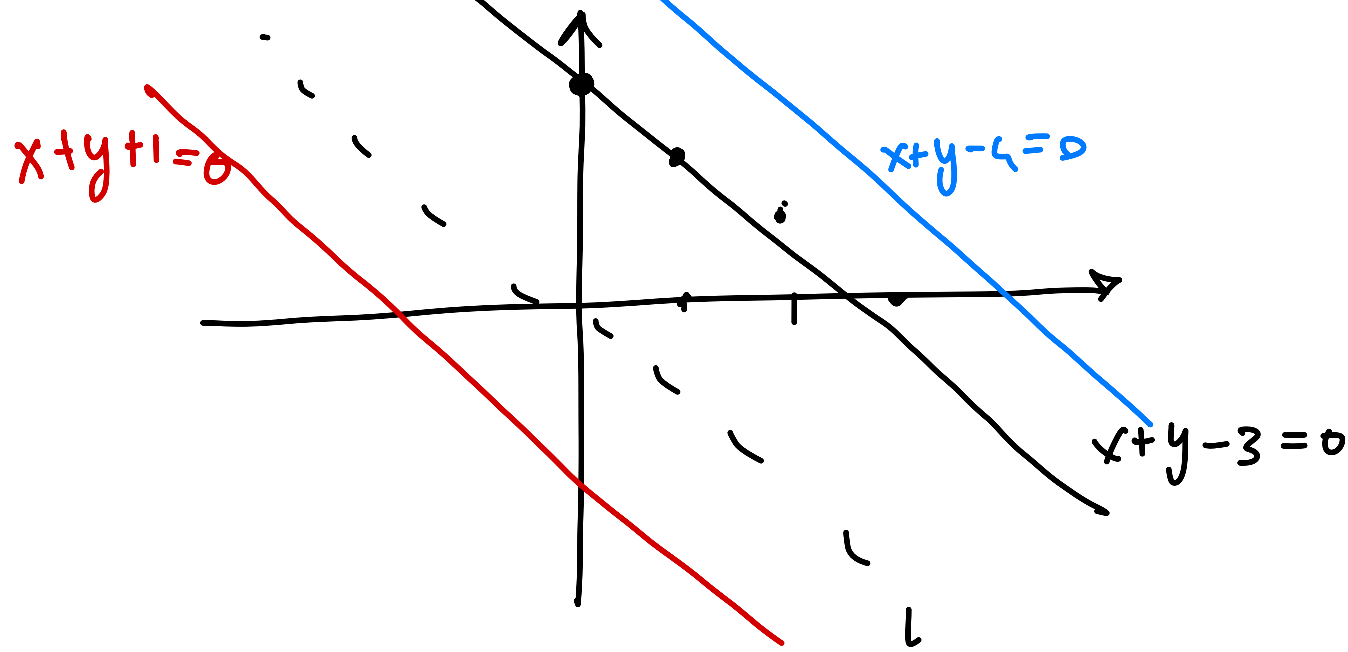
$$ax+by+c=0$$ con a e b NON entrambi nulli

Esempio: $x+3=0 \iff \boxed{x=-3}$

(su y NON ho condizioni)



$$x + y - 3 = 0 \iff y = -x + 3$$



Sia $ax + by + c = 0$ un'equazione qualsiasi di una retta. Se $b \neq 0$ posso scrivere equivalentemente

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \qquad m = -\frac{a}{b} \qquad q = -\frac{c}{b}$$

$\boxed{y = mx + q}$ si dice equazione parametrica di una retta m si dice COEFFICIENTE ANGOLARE

q è l'ordinata della retta
per $x=0$
INTERCETTA

Parentesi: sarebbe più preciso dire che LE equazioni param. di una retta sono di questa forma:

$$\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$