Operazioni fra insiemi

10/9/2025

Definizione: Dati due insiemi A e B, definiamo l'insieme UNIONE fra A e B $A \cup B$ come

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \};$$

definiamo l'insieme INTERSEZIONE fra A e B, $A \cap B$ come

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}.$$

Se $A \cap B = \emptyset$, allora gli insiemi A e B si dicono DISGIUNTI

Esempi: $A = \{a, b, c\}$ $B = \{a, e\}$

$A \cap B = \{a\}$, $A \cup B = \{a, b, c, e\}$

Proprietà: È sempre vero che:

$A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$ (*)

$A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$ (**)

Infatti (*) $\boxed{C \subseteq D \iff \forall x \in C \Rightarrow x \in D}$

Sia $x \in B$. Allora $x \in B \vee x \in A$ $\Rightarrow x \in A \cup B$.

(**) Sia $y \in A \cap B$. Questo vuol dire che $y \in A$ e $y \in B$. Ma allora $y \in A$.

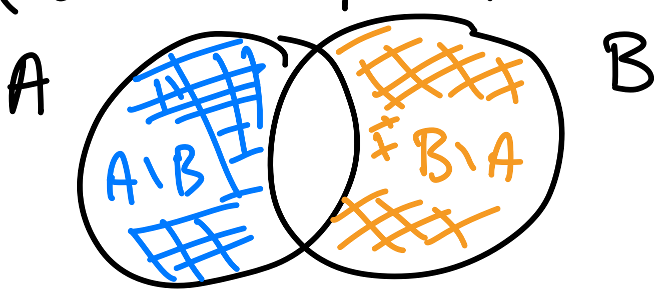
<u>Definizione</u>: Dati A e B due insiemi, definiamo la DIFFERENZA INSIEMISTICA fra A e B, $A \setminus B$ $\boxed{(A \setminus B,\ A - B)}$ come

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

A volte $A \setminus B$ è detto COMPLEMENTARE di B in A.

<u>Osservazione</u>:

$A \setminus B$ è diverso da $B \setminus A$. In particolare $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$ (sono disgiunti)



<u>Esempio</u>: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, e\}$

$A \setminus B = \{b, c\}$, $B \setminus A = \{e\}$

Spesso si lavora in situazioni in cui si considerano solo sottoinsiemi di un dato insieme di riferimento X detto UNIVERSO. In questo caso possiamo dare la seguente definizione.

<u>Definizione</u>: Sia A un insieme nell'universo X. Definiamo COMPLEMENTARE di A (in X) l'insieme $X \setminus A$.

Il complementare di A viene indicato come $\complement A$, ${}^{c}A$, A^c, $\overline{A}$

$$A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}.$$

<u>Proprietà</u>:

① $\emptyset^c = X$, $X^c = \emptyset$, $(A^c)^c = A$

② $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$

③ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

④ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

⑤ $A\cap A=A\ ,\ A\cup A=A$ PROPRIETA' di IDEMPOTENZA

⑥ $A\cap A^c=\phi\ ,\ A\cup A^c=X$

⑦ $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,\ (A\cap B)^c=A^c\cup B^c.$

dimostrazione:

① Dimostriamo che $(A^c)^c=A$

$$C=D \iff (C\subseteq D \wedge D\subseteq C)$$
$$\iff [(\forall x\in C \Rightarrow x\in D)\wedge (\forall x\in D \Rightarrow x\in C)]$$

$D^c=\{x\in X \mid x\notin D\}$ $\quad x\notin D$ è equivalente a $\neg(x\in D)$

Sia $y\in(A^c)^c \Rightarrow y\in\{x\in X\mid x\notin A^c\}$

$$\Rightarrow \neg[y\notin A^c] \equiv \cancel{\neg}[\cancel{\neg}(\boxed{y\in A^c})] \equiv \cancel{\neg}[\cancel{\neg}(y\notin A)] \equiv$$

$y\in A^c \equiv \neg(y\in A)$, $\quad y\in A^c \equiv \boxed{y\notin A}$

$$\equiv y\in A$$

Ho dimostrato che se $y\in(A^c)^c \Rightarrow y\in A$, cioè $(A^c)^c\subseteq A$

Resta da dimostrare che $A \subseteq (A^c)^c$, cioè che se $y \in A \Rightarrow y \in (A^c)^c$.

Mi ricordo che $P \Rightarrow Q \equiv (\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$. Quindi se dimostro che $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$, allora ho dimostrato che $P \Rightarrow Q$.

Provo a dimostrare che se $y \notin (A^c)^c \Rightarrow$
$\Rightarrow y \notin A$. Guarda sopra le modifiche fatte col verde

④ Dimostriamo che
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Proviamo a dimostrare le due inclusioni contemporaneamente sfruttando "$\Leftrightarrow$", invece che "$\Rightarrow$".

Sia $x \in A \cup (B \cap C)$. Questo vuol dire che $(x \in A) \vee (x \in B \cap C)$, cioè
$$(x \in A) \vee [(x \in B) \wedge (x \in C)] \Leftrightarrow$$
Mi ricordo che $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
$$\Leftrightarrow [(x \in A) \vee (x \in B)] \wedge [(x \in A) \vee (x \in C)]$$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(In un colpo solo ho dimostrato le due inclusioni).

5 $A \cap A = A$. So già, per le proprietà dell'intersezione che $A \cap A \subseteq A$ $[C \cap D \subseteq C$ e $C \cap D \subseteq D]$

Devo solo dimostrare che $A \subseteq A \cap A$.

Sia $x \in A$, allora $x \in A \wedge x \in A$, ma allora $x \in A \cap A$.

<u>Esempi</u>: $A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x$ è multiplo di 3 $\}$

$B = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x$ è multiplo di 2 $\}$

$A = \{ 0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \dots \}$

$B = \{ 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \dots \}$

Siccomemente $A \not\subseteq B$ $B \not\subseteq A$

$A \cup B = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x$ è multiplo di 3 oppure x è multiplo di 2 $\}$

$\stackrel{!}{=} \{ x \in \mathbb{Z} \mid \exists m \in \mathbb{Z} \ \exists n \in \mathbb{Z}$ tali che $x = 3m \lor x = 2n \}$

$$A \cap B = \{ x \in \mathbb{Z} \mid \exists m \in \mathbb{Z} \ \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tali che } x = 3m \land x = 2n \}$$

Determinare: $\boxed{A \setminus B, B \setminus A, A^c, B^c.}$ Per casa

Calcoliamo $B \setminus A$

$$B \setminus A = \{ \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 10, \pm 14, \pm 16, \pm 20, \dots \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ è multiplo di } 2 \text{ e } x \text{ NON è multiplo di } 3 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{Z} \mid \exists m \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } x = 2m \text{ e } \nexists n \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } x = 3n \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{Z} \mid \exists m \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } x = 2m \text{ e } \forall h \in \mathbb{Z} \ x \neq 3h \}$$

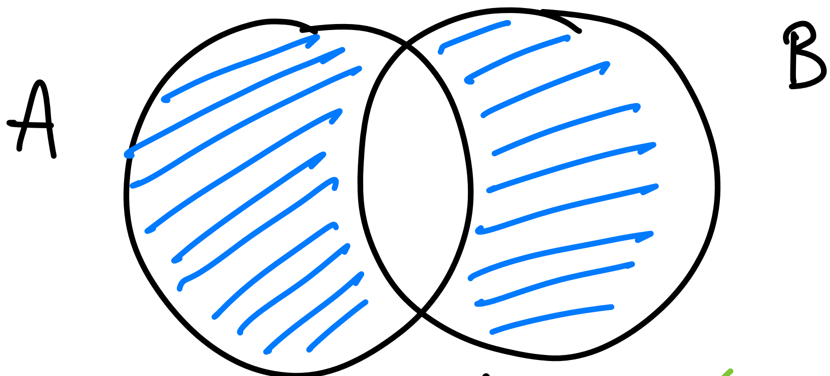
Definizione: Dati due insiemi A e B definiamo DIFFERENZA SIMMETRICA fra A e B l'insieme

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

(Si osservi l'analogia col connettivo logico AUT $\dot{\vee}$)

Osservo che

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \triangle A$



Si può dimostrare (fare per caso)

che $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

<u>Proprietà</u>: Siano A, B, C insiemi

$$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$$

Infatti sia $x \in (A \triangle B) \cap C$.

Questo vuol dire che $x \in (A \triangle B)$ e $x \in C$

Ma se $x \in (A \triangle B)$ questo vuol dire che $(x \in A$ e $x \notin B)$ oppure $(x \in B$ e $x \notin A)$

Quindi (per la proprietà $(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$)

è vero che

$(x \in A$ e $x \notin B)$ e $x \in C$ oppure

$(x \in B$ e $x \notin A)$ e $x \in C$

Questo è equivalente a dire

che

$(x \in A$ e $x \in C)$ e $x \notin B$ oppure

$(x \in B$ e $x \in C)$ e $x \notin A$

cioè

$(x \in A \cap C$ e $x \notin B)$ o

$(x \in B \cap C$ e $x \notin A)$

Osservo che se $x \notin B$ allora

a maggior ragione $x \notin B \cap C$

Analogamente per A

quindi $\Longrightarrow$

$(x \in A \cap C$ e $x \notin B \cap C)$ o

$(x \in B \cap C$ e $x \notin A \cap C)$

cioè $x \in ((A \cap C) \setminus (B \cap C)) \cup ((B \cap C) \setminus (A \cap C))$

cioè $x \in (A \cap C) \Delta (B \cap C)$.

Fare l'altra inclusione.

Prodotto Cartesiano

__Definizione__: Dati due insiemi A e B definiamo il PRODOTTO CARTESIANO fra A e B come l'insieme delle coppie ORDINATE di elementi (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$,

cioè

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

__Esempio__: $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{$estate, primavera, inverno, autunno$\}$

$A \times B = \{ (1, \text{estate}), (1, \text{autunno}),$

$\cancel{(\text{inverno}, 3)} \; (3, \text{primavera}),$

$\dots \}$

$= \{ (x, y) \mid x \in \{1,2,3,4\}, \; y \in \text{stagioni} \}$

__esempio__: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\alpha, \beta\}$

$$A \times B = \{ (1, \alpha), (1, \beta), (2, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha), (3, \beta) \}$$

__Osservazione__: $A \times B \neq B \times A$

__Proprietà__:

Con un abuso di linguaggio possiamo dire che

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C \quad (*)$$

Un elemento di $A \times (B \times C)$

$x = (a, y)$ con $a \in A$, $y \in B \times C$

$y = (b, c)$

$\Rightarrow x = (a, (b, c))$

E non centra niente con

$((a, b), c)$

Facciamo questo discorso sottintendendo che $(a, (b, c)) = (a, b, c)$

Altre proprietà:

- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

Grazie alla (*) è possibile definire

n-uple ordinate

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots a_n \in A_n\}$$

Se $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$

Scriveremo $A_1 \times \dots \times A_n = A^n$

Esempi importanti:

$$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{Z}^5, \mathbb{Q}^4, \dots$$