

LOGICA

Di cosa ci occupiamo?

Ci occupiamo di ENUNCIATI (o PROPOSIZIONI).

Un ENUNCIATO è un'affermazione per la quale sia possibile stabilire in modo UNIVOCO e OGGETTIVO se è VERA o FALSA.

Esempi:

- "La capitale dell'Italia è Roma" è un enunciato VERO.
- "La capitale dell'Italia è Berlino" è un enunciato FALSO.
- " $27 + 12 = 39$ " è un enunciato VERO.
- "L'area di un quadrato è pari a due volte la lunghezza di un lato" è un enunciato FALSO.

- "Io mento" Non è un enunciato
- "Il mare Adriatico è bello"
Non è un enunciato
- "La meraviglia è un fiore"
(Nel nostro contesto) è un enunciato
VER.
- "Io sono alto 175 cm e indosso le scarpe".
È un enunciato VER

Questo è un enunciato che ne contiene 2.

D'ora in poi denoteremo gli enunciati con lettere maiuscole:

$A, B, C, \dots, P, \dots$

$A: "27 + 12 = 39"$

Dato un enunciato P possiamo definire $\neg P$ ("non P ") la sua

negazione.

$\neg P$ è definito come segue

$\neg P$ è VERO se P è FALSO e
 $\neg P$ è FALSO se P è VERO

Equivalentemente definiamo $\neg P$ mediante la sua tavola di verità!

P	$\neg P$
V	F
F	V

Osservo che $\neg(\neg P)$ ha gli stessi valori di verità di P . Si chiama
LEGGE DELLA DOPPIA NEGAZIONE.

Veifichiamo:

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
V	F	V
F	V	F

Diciamo che due enunciati, A e B che hanno gli stessi valori di verità si dicono **LOGICAMENTE EQUIVALENTI** e

indichiamo con $A \equiv B$

Quindi, $P \equiv \neg(\neg P)$

Esempi:

P : "Due quesheti affiancati formano un altro queseto."

$\neg P$: "Non è vero che due quesheti affiancati..."

: "Due quesheti affiancati non formano un altro queseto."

$\neg(\neg P)$: "Non è vero che due quesheti affiancati non formano un altro queseto."

P	$\neg$			
V	V	F	V	F
F	F	V	V	F

CONNETTIVI BINARI

• CONGIUNZIONE e DISGIUNZIONE

Dati due enunciati A e B , la congiunzione, indicata con $A \wedge B$ (si legge " A e B ") rappresenta la congiunzione che in linguaggio italiano indiciamo con "e", "ma". C'è, indica simultaneità degli enunciati.

La disgiunzione, $A \vee B$ (si legge " A o B ") rappresenta l'italiano "o", "oppure". C'è, indica che almeno uno di due enunciati è vero.

La definizione formale di $A \wedge B$ e di $A \vee B$ è data mediante tabelle di verità.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

ALMENO UNO
FRA A e B è
VERO

Esempi:

A: "Paig' è in Italia" F

B: " $18 \times 2 = 36$ " V

$A \wedge B$ F

$A \vee B$ V

È possibile definire una "o" esclusiva, detta AUT. Si indica con $A \dot{\vee} B$ (Si legge "o A o B"). La sua tavola di verità è data da

A	B	$A \dot{\vee} B$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

In realtà, nella logica degli enunciati, gli unici connettivi necessari e sufficienti sono $\neg, \wedge, \vee$.

Cioè ogni enunciato è logicamente

equivalente ad uno che contiene
solo $\neg, \wedge, \vee$.

Ad esempio:

$$A \dot{\vee} B \equiv (A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B)$$

A	B	$A \dot{\vee} B$	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge (\neg B)$	$(\neg A) \wedge B$	$(A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B)$
V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	V	F	V	V	F	V
F	V	V	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	F	F	F

Ho mostrato che $A \dot{\vee} B$ è logicamente
equiv. a $(A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B)$.

Osservazioni:

- I connettivi $\wedge$ ed $\vee$ sono commutativi, cioè $A \wedge B \equiv B \wedge A$ e $A \vee B \equiv B \vee A$
- Se P è un' enunciato qualsiasi, allora

$P \wedge (\neg P)$ è FALSO infatti

$P \vee (\neg P)$ è VERO

P	$\neg P$	$P \wedge (\neg P)$	$P \vee (\neg P)$
V	F	F	V
F	V	F	V

La colonna $\otimes$ fa riferimento al principio di NON CONTRADDIZIONE, cioè un enunciato non può essere vero e falso contemporaneamente.

Un enunciato che sia FALSO (VERO) per ogni valore di verità dei sottoenunciati contenuti viene detto CONTRADDIZIONE (TAUTOLOGIA)

$P \wedge (\neg P)$ è una contraddizione
 $P \vee (\neg P)$ è una tautologia

LEGGI di DE MORGAN

$$\neg (P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$$

$$\neg (P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg (P \wedge Q)$	$\neg (P \vee Q)$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
V	V	F	F	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V	F	V	F
F	V	V	F	F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	F	F	V	V	V	V

Esempio: P : "Piove" Q : " $1+1=2$ "

$P \wedge Q$: "Piove e $1+1=2$ "

$P \vee Q$: "Piove oppure $1+1=2$ "

$\neg (P \wedge Q)$: "Non è vero che piove e $1+1=2$ "
: "Non piove oppure $1+1 \neq 2$ "

$\neg (P \vee Q)$: "Non è vero che piove oppure $1+1=2$ "
: "Non piove e $1+1 \neq 2$ "

Proprietà: Siano P, Q ed R enunciati

Valgono le seguenti equivalenze logiche:

- $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$
- $P \vee (Q \vee R) \equiv P \vee (Q \vee R)$
- $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
- $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

