PRECORSO 7

martedì 16 settembre 2025 09:06

Nella scorsa lezione abbiamo visto che

- Se $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ è pari:

$$\sqrt[n]{a(x)} = b(x) \iff \begin{cases} \cancel{a(x) \geq 0} \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) = b(x)^n \end{cases}$$

- Se $n \in \mathbb{N}$ è dispari

$$\sqrt[n]{a(x)} = b(x) \iff a(x) = b(x)^n$$

Esistono equivalenze simili anche per le disequazioni

- Se n è dispari

$$\sqrt[n]{a(x)} \leq b(x) \iff a(x) \leq b(x)^n$$

$$\sqrt[n]{a(x)} \geq b(x) \iff a(x) \geq b(x)^n$$

$$\sqrt[n]{a(x)} < b(x) \iff a(x) < b(x)^n$$

$$\sqrt[n]{a(x)} > b(x) \iff a(x) > b(x)^n$$

- Se n è pari

$$\sqrt[n]{a(x)} \leq b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) \leq b(x)^n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a(x)} \geq b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) \geq b(x)^n \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a(x)} < b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) < b(x)^n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a(x)} > b(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) > b(x)^n \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) < 0 \end{cases}$$

Esistono anche tipi diversi di equazioni e disequazioni con radici:

- Consideriamo un'equazione del tipo

$\sqrt[n]{a(x)} = \sqrt[m]{b(x)}$ con n, m pari

Equivale a:

$$\begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a^{\frac{k}{n}}(x) = b^{\frac{k}{m}}(x) \end{cases} \quad \text{con} \quad K = m.c.m(a, b).$$

- $\sqrt[n]{a(x)} \geq \sqrt[m]{b(x)}$ con n pari, m dispari.

equivale a:

$$\begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a^{\frac{k}{n}}(x) \geq b^{\frac{k}{m}}(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) < 0 \end{cases}$$

ESEMPIO Risolviamo la disequazione:

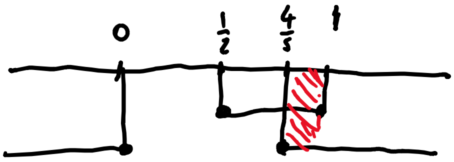
$\sqrt{1-x^2} \leq 2x - 1$

$$\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \\ 1 - x^2 \leq (2x-1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ \cancel{1} - x^2 \leq 4x^2 - 4x \cancel{+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 5x^2 - 4x \geq 0 \end{cases} \qquad x(5x-4)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ x \le 0 \ \vee \ x \ge \frac{4}{5} \end{cases}$$



$$\frac{4}{5} \le x \le 1.$$

ESEMPIO 2

$$\sqrt{1 - x^2} \ge 2x - 1$$

$$\begin{cases} 1 - x^2 \ge 0 \\ 2x - 1 \ge 0 \\ 1 - x^2 \ge (2x-1)^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 1 - x^2 \ge 0 \\ 2x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ \cancel{1} - x^2 \ge 4x^2 - 4x + \cancel{1} \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$-1 \le x < \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ 5x^2 - 4x \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ 0 \le x \le \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \le x \le \frac{4}{5}$$

Conclusione: $\frac{1}{2} \le x \le \frac{4}{5} \quad \vee \quad -1 \le x < \frac{1}{2}$

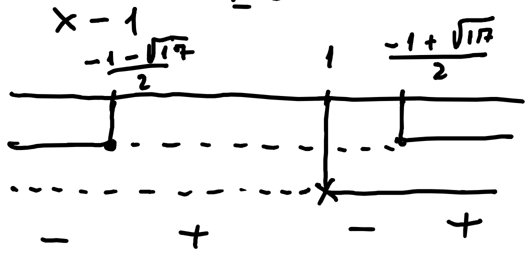
cioè $-1 \le x \le \frac{4}{5}$

ESEMPIO 3

$$\sqrt{\frac{x^2 + x - 4}{x - 1}} \ge 2 - x$$

$$\begin{cases} \frac{x^2+x-4}{x-1} \ge 0 & (1) \\ 2 - x \ge 0 & (x \le 2) \\ \frac{x^2+x-4}{x-1} \ge (2-x)^2 & (3) \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \frac{x^2+x-4}{x-1} \ge 0 \\ 2 - x < 0 \end{cases}$$

① $\dfrac{x^2+x-4}{x-1} \geq 0$ $\longrightarrow$ $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$



$\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} \leq x < 1 \quad \vee \quad x \geq \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$

③ $\dfrac{x^2+x-4}{x-1} \geq (2-x)^2$

$$\frac{x^2+x-4-(2-x)^2(x-1)}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{x^2+x-4-(4-4x+x^2)(x-1)}{x-1} \geq 0$$

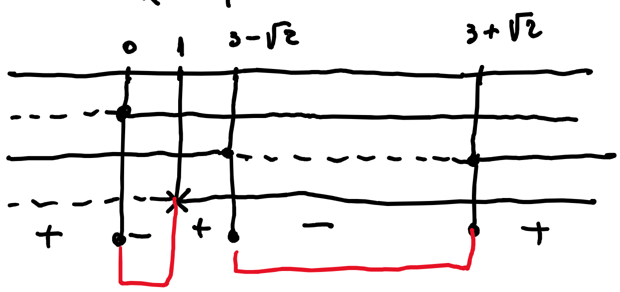
$$\frac{x^2+x-4-(4x-4x^2+x^3-4+4x-x^2)}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{x^2+x-\cancel{4}-x^3+5x^2-8x+\cancel{4}}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{-x^3+6x^2-7x}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{x^3-6x^2+7x}{x-1} \leq 0$$

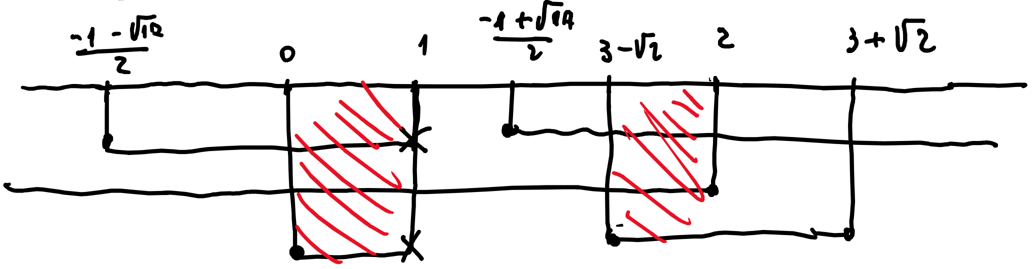
$\dfrac{x(x^2-6x+7)}{x-1} \leq 0$ $\longrightarrow$ $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{2}}{1} = 3 \pm \sqrt{2}$



$0 \leq x < 1 \quad \vee \quad 3-\sqrt{2} \leq x \leq 3+\sqrt{2}$

• Passiamo al secondo sistema:

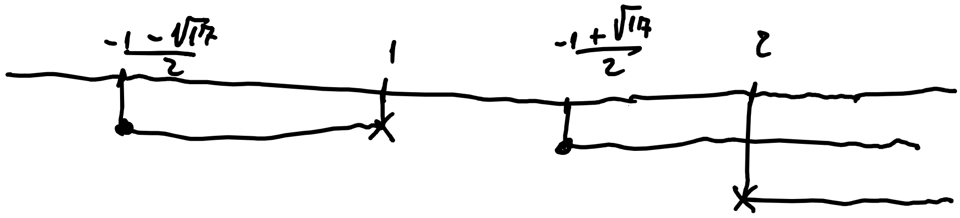
$$\begin{cases} \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} \le x < 1 \quad \vee \quad x \ge \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x \le 2 \\ 0 \le x < 1 \quad \vee \quad 3-\sqrt{2} \le x \le 3+\sqrt{2} \end{cases}$$



$$0 \le x < 1 \quad \vee \quad 3-\sqrt{2} \le x \le 2.$$

Soluzioni del secondo sistema

$$\begin{cases} \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} \le x < 1 \quad \vee \quad x \ge \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x > 2 \end{cases}$$



$$x > 2$$

Conclusione

$$0 \le x < 1 \quad \vee \quad 3-\sqrt{2} \le x \le 2 \quad \vee \quad x > 2$$

cioè $\quad 0 \le x < 1 \quad \vee \quad x \ge 3-\sqrt{2}$

Logaritmi

Per definire le radici n-esime, siamo partiti da $x^n = y$. In modo simile per definire i logaritmi si parte da un'equazione di tipo esponenziale.

• Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $y \in \mathbb{R}$. Consideriamo l'equazione $a^x = y$.

TEOREMA Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Allora:

- Se $a = 1$: l'equazione ha soluzione solo se $y = 1$ e in tal caso è risolta da ogni $x \in \mathbb{R}$.
- Se $y \leq 0$ l'equazione $a^x = y$ non ha soluzioni
- Se $y > 0$ e $a \neq 1$ l'equazione ha un'unica soluzione reale, cioè $\exists!\ x$ t.c. $a^x = y$.

Def: Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ e $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$. Si definisce LOGARITMO IN BASE a di y l'unico numero reale x tale che $a^x = y$. (si indica con $\log_a y$)

Ricordare

1) la base a deve appartenere a $]0,1[\ \cup\ ]1,+\infty[$
2) $\log_a y$ è definito solo se $y > 0$
3) Se $a \in\ ]0,1[\ \cup\ ]1,+\infty[$ e $y > 0$ allora:

$$x = \log_a y \iff a^x = y$$

ESEMPI

$\log_2 16 = 4$ (perché $2^4 = 16$)

$\log_3 27 = 3$ ($3^3 = 27$)

$\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5$ ($\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 2^5 = 32$)

$\log_{10} 0{,}01 = -2$ ($0{,}01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$)

$\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$

$\log_2 3$? è l'esponente da dare a 2 per ottenere 3 (ma non ha una rappresentazione esplicita ed è un numero irrazionale).

Notazioni particolari

- logaritmo in base 10 : $\log_{10} y$ o $\mathrm{Log}\, y$
- logaritmo in base e (LOGARITMO NATURALE)

  $\log_e y$, $\ln y$ o $\log y$

PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

1) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\log_a a^x = x$
2) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$: $a^{\log_a x} = x$
3) $\log_a 1 = 0$ e $\log_a a = 1$
4) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0$: $\log_a (x y) = \log_a x + \log_a y$
5) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\log_a \frac{1}{x} = - \log_a x$
6) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0$: $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
7) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x > 0$: $\log_a x^y = y \log_a x$
8) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$: $\log_{\frac{1}{a}} x = - \log_a x = \log_a \frac{1}{x}$
9) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0, x \neq 1$: $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$
10) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $b \neq 1$:

    $$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

OSS

- Nella 7) $\log_a x^y = \log_a (x^y) = y \log_a x$
  da non confondere con $(\log_a x)^y = \log_a^y x$
- Attenzione, non c'è una formula esplicita per $\log_a (x+y)$ e $\log_a (x-y)$.
  Se si vogliono usare le proprietà dei logaritmi occorre ricondursi a prodotti / quozienti

$$\log_a (x+y) = \log_a \left(x\left(1+\frac{y}{x}\right)\right)$$
$$= \log_a x + \log_a \left(1+\frac{y}{x}\right)$$

ESEMPI

1) $$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{9} = \log_{\frac{1}{3}} 9^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{3}} 9 = \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$
$$= -\frac{2}{3} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

2) $$\log_4 40 = \log_4 (4 \cdot 10) = \log_4 4 + \log_4 10$$
$$= 1 + \log_4 10$$
$$= 1 + \log_4 2 + \log_4 5 = 1 + \frac{1}{2} + \log_4 5$$
$$= \frac{3}{2} + \log_4 5$$

3) $$2^{\log_2 a^{\log_a 4}} = 2^{\log_2 4} = 2^2 = 4$$
$$2^{\log_2 a^{\log_a 4}} = \left(2^{\log_2 a}\right)^{\log_a 4} = a^{\log_a 4} = 4$$

OSS Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

1) $x = y \iff a^x = a^y$

2) $x = y \wedge x, y > 0 \iff \log_a x = \log_a y$

Queste equivalenze si possono usare per risolvere equazioni con esponenziali e logaritmi

ESEMPI

1) Risolvere $2 \cdot 3^x = 16$

$$3^x = 8$$

$$\log_3 3^x = \log_3 8$$

$$x = \log_3 8 \qquad (x = \log_3 2^3 = 3\log_3 2)$$

2) $5^{x^2+x} + 3 = 0$

$$5^{x^2+x} = -3$$

non ci sono soluzioni

3) $5^{x+1} = \frac{1}{2}\, 6^{3x}$

$$\log_5 5^{x+1} = \log_5\left(\frac{1}{2}\, 6^{3x}\right)$$

$$x+1 = \log_5 \frac{1}{2} + \log_5 6^{3x}$$

$$x+1 = \log_5 \frac{1}{2} + 3x \log_5 6$$

$$x - 3x\log_5 6 = \log_5 \frac{1}{2} - 1$$

$$x\underbrace{(1 - 3\log_5 6)}_{\neq 0} = \log_5 \frac{1}{2} - 1$$

$$x = \frac{\log_5 \frac{1}{2} - 1}{1 - 3\log_5 6}$$

Nota: In generale data un'espressione del tipo $a^{p(x)} = b^{q(x)}$
possiamo fare il logaritmo (ad esempio in base a) di entrambi i membri per ricondurci a

$$p(x) = q(x) \log_a b$$